

Hvad er matematik?

OG FYSIK – 3

Dorthe Agerkvist

Michael Olesen

faglig redaktion:

Forfattergruppen bag

Hvad er matematik?

Hvad er matematik? 3, e-bog

ISBN 9788770668781

Hvad er matematik? Studieretningskapitlerne, kapitel 11 Matematik og Fysik

Hvad er matematik? OG FYSIK - 3
Dorthe Agerkvist og Michael Olesen

© 2019 L&R Uddannelse, København
- et forlag under Lindhardt og Ringhof A/S, et selskab i Egmont

Materialet er identisk med kapitel 11 i Hvad er matematik? A og 3
fagligt samarbejde Matematik-Fysik

Faglig redaktion: Forfattergruppen bag Hvad er matematik?

Mekanisk, fotografisk, elektronisk eller anden gengivelse af dette materiale
eller dele heraf er kun tilladt efter Copy-Dans regler.

Vi har forsøgt at finde eventuelle rettighedsindehavere, som kan tilkomme honorar i henhold til loven om ophavsret.
Skulle der mod forventning være rettighedsindehavere, som måtte have krav på vederlag, vil dette blive håndteret,
som om der var indgået aftale.

11. Fagligt samarbejde matematik og fysik

Indholdsfortegnelse

Introduktion.....	5
Kapitel 1. Kontinuitet.....	6
1.1 Atomernes verden.....	6
1.2 Er tid og rum kontinuerte størrelser?.....	8
1.3 SRP.....	9
Kapitel 3. Integralregning 2.....	10
3.1 Massemidt punkt.....	10
3.2 Inertimomenter beregnet ved integralregning.....	13
3.3 Impulsmoment og kraftmoment.....	15
3.4 Newtons tyngdelov.....	16
3.5 Potentiel energi i tyngdefeltet fra en punktmasse.....	17
3.6 Potentiel energi af en homogen kugle.....	18
3.7 Frit fald i tyngdefeltet.....	20
3.8 Strålingslovene og deres sammenhæng.....	24
3.9 SRP.....	26
Kapitel 5. Vektorer og analytisk geometri i plan og rum.....	28
5.1 Kraft og arbejde.....	28
5.2 Lorentz kraften.....	30
5.3 Kurvekørsel.....	31
5.4 Det skrå kast med luftmodstand.....	33
5.5 Det skrå kast med luftmodstand og skru.....	36
5.6 Det skrå kast med luftmodstand og skru til siden.....	38
5.7 SRP.....	38
Kapitel 8. Andenordens differentiaalligninger.....	40
8.1 Matematisk pendul.....	40
8.2 Fysisk pendul.....	41
8.3 Harmonisk svingning – fjeder.....	43
8.4 Dæmpet svingning.....	45
8.5 Radioaktive henfald – henfaldskæde.....	46

8.6 Det bærende kabel for en hængebro	49
8.7 Kædespringvand	52
8.8 SRP	55
Kapitel 9. Regressionsmodeller	56
9.1 Introduktion.....	56
9.2 Mindste kvadraters metode	56
9.3 Den generelle formel.....	58
9.4 Praktisk arbejde	60
9.5 Kepler og Marsbanen	61
9.6 SRP	67
Kapitel 10. Lyd, harmoniske svingninger og fourieranalyse	68
10.1 Hvad er lyd?	68
10.2 Lydopfattelse - Støj eller musik?	69
10.3 Lydbølger	71
Rene toner – rene sinussvingninger.....	71
Sammensatte toner og interferens – sum af sinussvingninger.....	72
10.4 Eksempel: Guitarens svingende streng	73
Stødtoner	73
10.5 Matematisk beskrivelse af det sammensatte lydbillede	75
Opsplitning af en kompleks lyd i en sum af sinussvingninger	75
10.6 Præsentation af Fourieranalyse	78
Eksempel: Fast Fourier analyse på smartphones.....	78
Beregning af Fourierkoefficienterne – indledende overvejelser om symmetri	79
Beregning af Fourierkoefficienterne for $s(t)$	81
10.7 Sampling – oversættelse mellem analog og digital.....	87
10.8 SRP	88

Introduktion

Dette store kapitel om fagligt samarbejde mellem matematik og fysik henvender sig til elever og hold der har matematik på A-niveau. Det indeholder mange oplæg til fælles projekter mellem de to fag, og som en særlig facilitet er der materialet igennem lagt et stort antal forslag ind til studieretningsprojekter med fagene matematik og fysik. Også matematik A hold, der ikke er i studieretning med fysik, vil kunne hente stor inspiration til forløb om matematikkens anvendelser, og generelt til perspektivering af den daglige undervisning.

Kapitlet er oprindeligt skrevet til lærebogssystemet efter reformen i 2005. Det forklarer de valgte emner, samt disponeringen af kapitlet, der følger dispositionen i *Hvad er matematik? A*, bortset fra kapitel 10 om lyd, lys og bølger der egentlig knyttede sig til *Hvad er matematik? B*, hvor det blev behandlet i kapitel 7. Men i det foreliggende materiale undersøges emnet med metoder, der overstiger B-niveau. I det nye reviderede lærebogssystem er emnet placeret i *Hvad er matematik? 3*, som kapitel 1.

Reformen fra 2017 har både omfordelt emnerne og udskiftet nogle med andre. Til disse ændringer hører, at *vektorregning og analytisk plangeometri* nu hører til B-niveau, og derfor er behandlet i *Hvad er matematik? 1 og 2*. *Rumgeometri og vektorregning i 3D* er gledet ud af pensum, men kan nu findes som et projekt i bind 2, kapitel 7.

Selv om emnerne således er flyttet en del rundt, har vi alligevel valgt at lægge kapitlet op i den foreliggende version for at gøre det meget righoldige materiale tilgængelig nu. Henvisningerne til grundbøgerne *Hvad er matematik? C*, *B* og *A* er nu suppleret med henvisninger til de nye opdaterede lærebøger *Hvad er matematik? 1,2 og 3*. For kortheds skyld skrives lærebøgerne: HEM A, HEM 3 osv.

Kapitlets hovedforfattere er som i bøgerne til C- og B-niveau: Dorte Agerkvist, lektor på Herlev Gymnasium og Michael Olesen, lektor på Vordingborg Gymnasium. Den faglige redaktion er foretaget af forfattergruppen bag lærebogssystemet *Hvad er matematik? De korrekturfejlede*, man eventuelt vil finde, skyldes alene den faglige redaktion. Det betyder også, at henvendelser om sådanne ting rettes til forlaget og / eller til forfattergruppen bag lærebogssystemet. Vi er taknemmelige for alt, der indberettes af den slags, og det vil blive indarbejdet i den endelige version, hvor de tre kapitler redigeres sammen til *ét samlet værk om fagligt samarbejde mellem matematik og fysik*. Dette værk, der bliver lagt op på bogsystemets website i løbet af 2019, vil blive disponeret efter de faglige emner, og ikke efter kapitelinddelingen i HEM 1, 2 og 3.

Forfattergruppen bag lærebogssystemet *Hvad er matematik?*
v/ Bjørn Grøn

Kapitel 1. Kontinuitet

Vores oplevelse af den fysiske verden er, at den er kontinuert. Vi kan stille os et vilkårligt sted og er ikke begrænset til kun at kunne være nogle specielle udvalgte steder. Tilsvarende flyder tiden afsted. Ganske vist viser vores ur, at det sker i spring på 1 sekund eller måske 0,1 sekund, men det oplever vi som en egenskab ved uret og ikke ved tiden.

Tilsvarende kan man altid hælde halvdelen af vandet i et glas ud – i hvert fald så præcist, som man nu kan måle det. Disse iagttagelser sammen med mange andre af samme slags er grundlaget for vores oplevelse af kontinuiteten i vores omverden og af, at alle fysiske størrelser (som længde, tid og mængde) er kontinuerte ligesom de tallinjer, vi kender fra matematikken.

Et sted spiller diskontinuitet dog en væsentlig rolle i dagligdagen. Alle telefoner, computere og et hav af elektriske apparater styres af elektriske kredsløb, der på det helt basale plan baserer sig på matematik med de to binære tal 0 og 1. Kun disse to tal er mulige output fra de grundlæggende logiske kredsløb eller gates, og man siger, at værdierne ikke er *kontinuerte* men derimod *diskrete*.

Matematikken i den digitale elektronik kaldes Boolesk algebra, og den er et meget spændende område. Vi vil ikke komme nærmere ind på den her, men sidst i afsnittet er et eksempel på en SRP om emnet.

Tingene i de digitale kredse er dog kun diskrete på overfladen. Tallet 0 svarer i kredsløbene til, at en bestemt spændingsforskel har værdien 0 V, og tallet 1 svarer til 5 V. De mellemliggende værdier af spændingen findes ikke – eller rettere sagt, det burde de egentlig ikke. Men, intet er perfekt, der er resistans i alle ledere mm, så i praksis tolkes alle spændinger under en bestemt værdi (typisk omkring 0,6 V) som 0, mens spændinger over en bestemt værdi (typisk 0,8 V) tolkes som 1. Det vi ser, er i virkeligheden bare en digitalisering af en kontinuert (analog) verden.

Verden er imidlertid ikke kontinuert. Allerede omkring 440 fvt fremsatte Demokrit ideen om, at alt er opbygget af små udelelige enheder (atomer efter græsk, atomos = udelelig). Ideen levede i over 2000 år som en af mange hypoteser om stoffet, indtil man i løbet af 1800-tallet lavede eksperimenter, der understøttede teorien. I dag har man en smuk, sammenhængende teori, der ud fra eksistensen af omkring 100 forskellige atomer kan forklare egenskaberne ved alle de stoffer, vi kender.

Så det er *ikke* muligt altid at hælde halvdelen af vandet i et glas ud! Når vi er nede på en enkelt vandmolekyle, kan vi ikke dele tingene længere og stadig have vand tilbage, og som vi skal se i det efterfølgende, tog mængden af diskontinuerte størrelser til efterhånden, som man begyndte at udforske atomernes verden.

1.1 Atomernes verden

I 1899 opdagede den tyske fysiker Max Planck, at beskrivelsen af den stråling, som et varmt legeme udsender, kun kan bringes i overensstemmelse med eksperimenterne, hvis man antager, at elektromagnetisk stråling (lys) kun kan forekomme i pakker/kvanter, der hver har energien $E = h \cdot f$, hvor f er lysets frekvens og $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J·s er en naturkonstant, der har fået navnet Plancks konstant. I 1905 forklarer Albert Einstein den fotoelektriske effekt ud fra antagelsen om, at lyskvanterne er partikler (fotoner) med normale partikelegenskaber som fx bevægelsesmængde, og i 1913 fremsætter Niels Bohr så sin atomteori, hvori han siger, at atomet kun kan eksistere i bestemte tilstande med bestemte, diskrete energier. Hermed er forestillingen om lys og energi som kontinuerte størrelser endeligt faldet.

Niels Bohr fremsatte de to postulater:

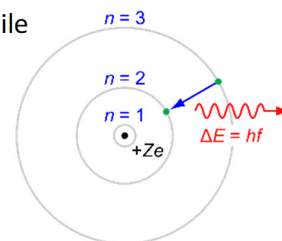
- a) Et atom kan kun eksistere i en række stabile tilstande. I hver tilstand har det en bestemt energi.

- b) Ved overgang mellem to stabile tilstande vil atomet emitte (udsende) eller absorbere (optage) en foton, hvis energi netop svarer til energiforskellen mellem de to tilstande.

Derudover var han i stand til at vise, at energierne for hydrogenatomets stabile tilstande er givet ved

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2},$$

hvor $R=1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ er Rydbergkonstanten, c er lysets hastighed og $n=1,2,3,\dots$



Opgave 1

- Vis at $hcR=13,60\text{eV}$, og beregn hydrogenatomets 6 lavest liggende energitilstande i eV.
- Vis, at fotonenergien kan skrives som $E=\frac{hc}{\lambda}$, hvor λ er fotonens bølgelængde. Vis dernæst at $hc=1260\text{eV}\cdot\text{nm}$, så vi har formlen $E=\frac{1260\text{eV}\cdot\text{nm}}{\lambda}$.
(Bemærk: I stedet for at dividere med λ kan man gange med frekvensen)
- Beregn fotonenergien og bølgelængden for overgangen til tilstanden med $n=1$ fra tilstandene $m=2,3,4$ og 5 (Lyman-serien).
- Beregn tilsvarende fotonenergi og bølgelængde for overgangene til tilstandene $n=2$ og $n=3$ (Balmer- og Paschen-serien).
- Hvor hører de tre serier til i det elektromagnetiske spektrum?
- Undersøg hvad der sker med energien, når n bliver uendelig stor. Dvs. beregn E_n for $n \rightarrow \infty$.
- Forklar, hvad der fysisk sker, når vi lader n gå mod uendelig. Hvilken fysisk tilstand svarer den beregnede grænseværdi til?

Opgave 2

Hydrogenatomet er det simpleste atom med kun en kerne og en enkelt elektron, og det er også det eneste atom, hvor man har en eksakt formel for energiniveauerne. Dog kan man generalisere ovenstående formel, hvis man har at gøre med atomer, der er stærkt ioniserede, så kun en enkelt elektron er tilbage. Det drejer sig om He^+ , Li^{+2} , Be^{+3} osv. Hvis Z betegner atomnummeret har man da formlen

$$E_n = -\frac{hcRZ^2}{n^2}.$$

- Beregn de 6 lavest liggende energiniveauer i He^+ , og sammenlign med energiniveauerne for hydrogen.
- Beregn fotonenergi og bølgelængde for foton der udsendes ved overgang fra $n=2$ til $n=1$.

c) Hvor i det elektromagnetiske spektrum befinder vi os nu?

d) Gentag b) og c) for ${}_{13}^{27}\text{Al}^{+12}$ og ${}_{82}^{208}\text{Pb}^{+81}$.

1.2 Er tid og rum kontinuerte størrelser?

Vi har allerede omtalt, at størrelser som lys, energi og stof kommer i kvanter. Man siger, at de er kvantiserede. Det er naturligt at tænke over, om det også gælder for alle andre fysiske størrelser. Er tiden også inddelt i tidskvanter, så der findes et mindste tidsrum, hvori noget kan foregå? Og hvad med rummet? Findes der en mindste længde, længdekvantet?

For at besvare disse spørgsmål, skal vi først se på to forskellige fysiske teorier, der hver for sig har været utroligt succesrige. Den fysiske beskrivelse af atomernes opførsel kaldes for kvantemekanikken, og man har opnået fantastisk præcise forudsigelser med den. For nogle fysiske størrelser har man opnået overensstemmelse mellem teori og eksperiment med 13-14 betydende cifre, og man har en fin beskrivelse af tre af de fire kræfter i naturen: Den elektromagnetiske kraft samt den stærke og den svage kernekraft. Kun tyngdekraften mangler.

Den sidste naturkraft, tyngdekraften, beskrives af Albert Einsteins generelle relativitetsteori fra 1915, og en del af teorien er en beskrivelse af rummet og tiden, eller nærmere af rum-tiden, idet de to størrelser er knyttet uløseligt sammen. Man arbejder på at forene de to beskrivelser, men i øjeblikket er status, at man på trods af mange gode ideer langt fra er i mål.

Et godt bud, hvis tid og rum skulle vise sig at være kvantiserede, er, at Planck-længden og Planck-tiden, som man har døbt disse størrelser, skal være funktioner af de grundlæggende naturkonstanter fra kvantemekanikken og relativitetsteorien, altså af Plancks konstant h , gravitationskonstanten G og lysets hastighed c . Noget, der i hvert fald giver de rigtige enheder, er

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$$

og

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}.$$

Konstanten $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ bruges ofte i stedet for Plancks konstant.

Opgave 3 Kontroller, at de to udtryk ovenfor giver de rigtige enheder.

Opgave 4

- Udregn l_p og t_p .
- Søg i diverse bøger og/eller på nettet efter de mindste længder og de mindste tidsrum, der til dato er målt indenfor fysikken.
- Sammenlign med Plancktiden og Plancklængden. Hvor tæt er man på at kunne se effekten af en kvantisering af tid og rum i eksperimenter?

Opgave 5 Hvis man skal se ting på Planckskalaen, skal man bruge lys/fotoner med en bølgelængde af den størrelsesorden.

- Beregn energien af en foton med $\lambda = l_p$.
- Sammenlign med den største energi, man har nået på CERN.
- Hvad svarer energien af fotonen til sammenlignet med fx bevægelsesenergien af en flue eller en supernovaeksplosion. Find noget, der har en tilsvarende energimængde.

1.3 SRP

Herunder er et eksempel på en formulering indenfor digitalelektronik og boolesk algebra.

Opgaveformulering: Digitalelektronik

Redegør for grundbegreberne samt udvalgte sætninger fra den booleske algebra. Specielt ønskes et bevis for de Morgans regler og derudover nogle beviser efter eget valg.

Forklar hvordan boolesk algebra kobler til logiske gates, samt hvordan man fra grunden opbygger en eller flere af dem. Du skal bygge og afprøve mindst to kredsløb.

Redegør kort for det binære talsystem samt for addition af binære tal. Giv et konkret eksempel på addition med to binære tal. Forklar hvordan logiske gates kan bruges til addition af binære tal.

Løs i forbindelse med besvarelsen nedenstående opgave.

Opgave:

Reducer følgende udtryk:

- $\overline{y \cdot (x + y)} + y$
- $\overline{xy} \cdot (\overline{x} + y)(\overline{y} + y)$

Opgaveformulering: Sorte huller og gravitationsbølger

Redegør for nogle af de grundlæggende teser i Einsteins almene relativitetsteori og specielt hans teori om gravitation. Hvad er sorte huller, hvordan opstår de og i hvilken forstand kan man sige at forudsigelsen om eksistensen af sorte huller er bekræftet gennem observationer.

En af Einsteins forudsigelser var eksistensen af gravitationsbølger, og i september 2015 blev det annonceret at forskerhold for første gang havde detekteret sådanne gravitationsbølger, der er udsendt fra en dobbeltstjernes kollaps til et sort hul. Opdagelsen er bla. behandlet i en tidsskrift artikel, der findes her:

<https://physics.aps.org/featured-article-pdf/10.1103/PhysRevLett.116.061102>

Du skal sætte dig ind i artiklens materiale og redegøre for deres metode, samt diskutere validiteten af deres opdagelse.

Kapitel 3. Integralregning 2

I dette afsnit bruges integralregning til flere forskellige ting. Først er der to afsnit, hvor det bruges til at beregne massemidtpunkt og inertimoment for stive legemer. Derefter kommer 4 afsnit, hvor Newtons gravitationslov bruges som udgangspunkt for at beregne potentiel energi i tyngdefeltet mm. Endelig kommer et afsnit om strålingslovene.

3.1 Massemidtpunkt

For et fysisk legeme, eller måske et system af flere legemer, bruger man ordet massemidtpunkt om det punkt, man skal understøtte for at kunne balancere legemet. Hvis man fx har en cirkulær plade, skal man understøtte centrum, for en lang stang bliver det midten af stangen osv.

Mere præcist definerer man koordinaterne til massemidtpunktet, G , som

$$x_G = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + \dots}{m_{total}} = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{m_{total}}$$
$$y_G = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + \dots}{m_{total}} = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{m_{total}}$$



Calders mobiler indeholder ofte flere balancepunkter. Her fra Louisiana

Eksempel 1 Massemidtpunktet af Jorden og Månen

Jorden og Månen kan betragtes som to kugler med masserne m_{Jorden} og $m_{Månen}$. Her regnes med, at al massen er samlet i centrum for både henholdsvis Jorden og Månen. Afstanden mellem Jorden og Månen kaldes d . Der indlægges et koordinatsystem, med førsteakse parallel med mellem Jordens og Månens centre, og med 0-punkt i Jordens centrum. Man behøver kun at beregne x -koordinaten til massemidtpunktet, da y -koordinaten må være nul: massemidtpunktet må jo ligge langs linjen gennem Jordens og Månens centre. Vi får så

$$x_G = \frac{m_{Jorden} \cdot 0 + m_{Månen} \cdot d}{m_{Jorden} + m_{Månen}} = \frac{m_{Månen} \cdot d}{m_{Jorden} + m_{Månen}}$$

Opgave 6 Slå værdierne op i Databogen og beregn x_G . Sammenlign med Jordens radius.

Opgave 7 Gør det samme for Solen og Jorden.

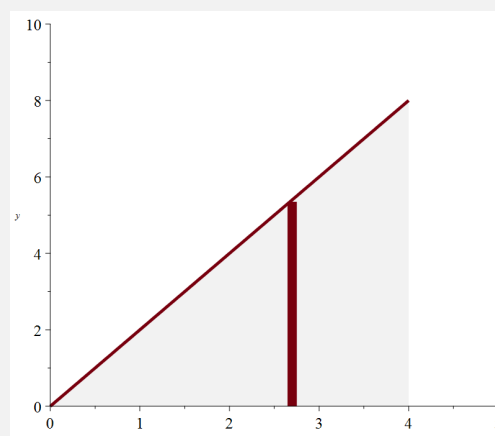
For stive legemer kan man bruge integralregning til at beregne massemidtpunktet

$$x_G = \frac{\int x dm}{m_{total}} \quad \text{og} \quad y_G = \frac{\int y dm}{m_{total}}.$$

Mange stive legemer vil være symmetriske, og der kan man hurtigt se, at massemidtpunktet er i det geometriske centrum, hvis massen er jævnt fordelt. Men dette er ikke altid tilfældet, hvis legemet ikke er symmetrisk.

Eksempel 2 Eksempel på beregning af et massemidtpunkt – en trekantet skive

Som et eksempel på en beregning, hvor man bruger denne metode, kan man betragte en trekantet skive, der ligger i 1. kvadrant, som vist på figuren, og som er afgrænset af linjerne $y = 2x$ og $x = 4$. Densiteten af pladen er ρ . Arealet er 16 (hvorfor?).



Først opdeles trekanten i tynde lodrette strimler med højden $y = 2x$ og bredden dx . Massebidraget herfra er da:

$$dm = \rho \cdot y \cdot dx = \rho \cdot 2x \cdot dx$$

Dette indsættes i formelen for x_G

$$x_G = \frac{\int_0^4 x \cdot \rho \cdot 2x \cdot dx}{\rho \cdot 16} = \frac{1}{16} \cdot \int_0^4 2x^2 dx = \frac{1}{16} \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^4 = \frac{8}{3}$$

Nu gøres det på samme måde for y_G , idet vi udnytter, at $y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y$

$$dm = \rho \cdot x \cdot dy = \rho \cdot \frac{1}{2}y \cdot dy$$

$$y_G = \frac{\int_0^8 y \cdot \rho \cdot \frac{1}{2}y \cdot dy}{\rho \cdot 16} = \frac{1}{16} \cdot \int_0^8 \frac{1}{2}y^2 dy = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{2 \cdot 3} y^3 \right]_0^8 = \frac{16}{3}$$

Massemidtpunktet ligger altså i $\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3} \right)$.

For en trekant så er massemidtpunktet det samme som medianernes skæringspunkt. Giv en forklaring på dette.

Opgave 8 Beregn massemidtpunktet for en trekant afgrænset af linjen $y = \frac{2}{3}x$ og ud til (0,6).

Eksempel 3 Eksempel på beregning af et massemidtpunkt – en parabelformet skive

Vi betragter en flad skive, der er formet som en parabel med højden h , se figur. Densiteten af skiven er ρ . Kanten af skiven er givet ved funktionen $f(x) = 4 - x^2$ og desuden af x -aksen. Massen antages at være jævnt fordelt over skiven.

Da skiven er symmetrisk, er x -koordinaten til massemidtpunktet 0, og vi skal kun beregne en y -koordinat.

Densiteten af pladen er ρ . Arealet er:

$$A = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3}$$

Først opdeles figuren i tynde vandrette strimler fra $-x$ til x , dvs strimler med højden dy og bredden $2x$. For en given y -værdi har vi:

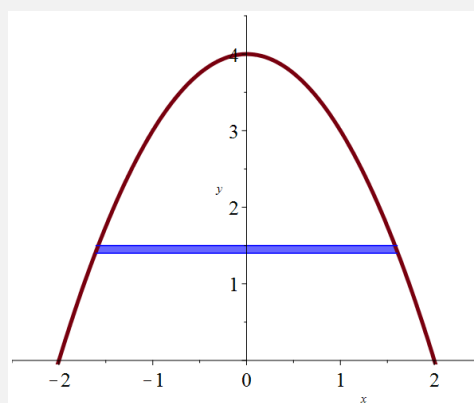
$$y = 4 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4 - y}$$

Dvs arealet af denne strimmel er

$$2x \cdot dy = 2\sqrt{4 - y} \cdot dy,$$

og massebidraget herfra er:

$$dm = \rho \cdot 2x \cdot dy = \rho \cdot 2\sqrt{4 - y} \cdot dy$$



Dette indsættes i formlen:

$$y_G = \frac{\int_0^4 y \cdot dm}{\rho \cdot A} = \frac{\int_0^4 y \cdot \rho \cdot 2\sqrt{4 - y} \cdot dy}{\rho \cdot A},$$

hvor A er arealet.

Vi beregner nu det endelige resultat vha. et værktøjsprogram

$$y_G = \frac{\int_0^4 y \cdot \rho \cdot 2\sqrt{4 - y} \cdot dy}{\rho \cdot A} = \frac{2 \cdot \rho \cdot \int_0^4 y \cdot \sqrt{4 - y} \cdot dy}{\rho \cdot \frac{32}{3}} = \frac{6}{32} \cdot \int_0^4 y \cdot \sqrt{4 - y} \cdot dy = \frac{8}{5}$$

Opgave 9 Løs ovenstående integral i hånden ved at lave en substitution med $u = 4 - y$.

Opgave 10 Beregn massemidtpunktet for en skive, der er halvcirkelformet med en radius på 5.

Øvelse 1 Lav en model i pap af de omtalte geometriske figurer. Prøv at finde massemidtpunktet ved balancere modellerne på fingeren, en blyant eller noget andet spidst. Sammenlign med de beregnede værdier.

Skal man finde massemidtpunktet af et legeme i tre dimensioner, så skal man bruge en tredje koordinat på tilsvarende vis. I mange praktiske tilfælde vil man kunne bruge geometriske argumenter til at bestemme en

eller flere af de tre koordinater. For eksempel har man for omdrejningslegemer drejet omkring x -aksen, at man kun behøver at beregne x -koordinaten, da de to andre koordinater må være lig nul pga. symmetri. Kegler kan betragtes som omdrejningslegemer, og her kan man bruge denne fremgangsmåde.

I eksemplet ovenfor blev massemidtpunktet af en trekant beregnet. Den kegle, der fremkommer, hvis man drejer linjen om x -aksen, vil have massemidtpunktet $(8/3, 0, 0)$.

3.2 Inertimomenter beregnet ved integralregning

Oftentimes vil man i fysik se bort fra et legemes udstrækning, men det kan man ikke altid. For stive legemer bruger man begrebet *inertimoment* i stedet for massen af et stift legeme. I inertimomentet tager man hensyn til både masse og udstrækning, for det har stor betydning, i hvilken afstand massen er placeret i forhold til den akse, man betragter. Inertimomentet I mht. en bestemt akse er summen af produkterne af de enkelte massedeles masser og kvadratet på deres afstand fra aksens.

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2$$

Man vil ofte bruge integralregning til at beregne inertimomentet, da man ikke altid kan sige, at massen er i en bestemt afstand. Så skriver man

$$I = \int r^2 dm$$

Vi vil nu beregne inertimomentet af en stang for en akse gennem midtpunktet, vinkelret på stangen. For at beregne dette for en stang med længde L og masse M for en akse gennem midten af stangen vinkelret på stangen inddeles stangen i små dele med længden dx og massen dm . Massen af den enkelte del kan beregnes som

$$dm = \frac{M}{L} \cdot dx$$



Nu kan vi integrere og finde inertimomentet (*Gør selv rede for hvert trin i omskrivningerne*):

$$\begin{aligned} I &= \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot \frac{M}{L} \cdot dx \\ &= \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \\ &= \frac{M}{L} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{M}{3L} \cdot \left(\left(\frac{L}{2} \right)^3 - \left(-\frac{L}{2} \right)^3 \right) \\ &= \frac{M}{3L} \cdot \left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) \\ &= \frac{M}{3L} \cdot \frac{L^3}{4} = \frac{1}{12} ML^2 \end{aligned}$$

Opgave 11 Beregn inertimomentet for en stang med længde L og masse M mht. en akse, der står vinkelret på stangen, og går gennem et endepunkt.

Eksempel 4 Som eksempel vil vi nu beregne inertimomentet af en cirkelskive, *mht. aksen gennem centrum, og vinkelret på skiven*. Skiven har massen M og radius R . Nu opdeles skiven i koncentriske cirkelringe med bredden dr . Hvis en af disse cirkelringe rettes ud, vil den næsten være et rektangel med arealet $2\pi \cdot r \cdot dr$, da bredden er dr , og længden er $2\pi \cdot r$. Jo mindre vi vælger dr til at være, jo bedre passer det. Hvis man skal have massen af cirkelringen, har man brug for masse pr. areal, her kaldet densiteten, ρ . Denne kan findes som massen af skiven divideret med arealet

$$\rho = \frac{M}{\pi \cdot R^2}$$

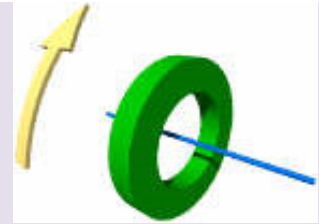
Massen af en cirkelring er så

$$dm = \rho \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr = \frac{M}{\pi \cdot R^2} \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr = \frac{2M}{R^2} \cdot r \cdot dr$$

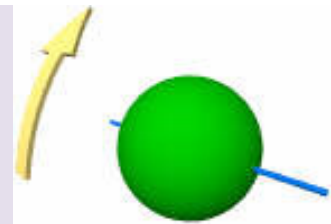
Nu kan inertimomentet beregnes

$$I = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot \frac{2M}{R^2} \cdot r \cdot dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \frac{1}{2} MR^2.$$

Opgave 12 Vis, at en cirkelring med massen M , ydre radius R_{ydre} og indre radius R_{indre} , har inertimomentet $\frac{1}{2}M(R_{ydre}^2 + R_{indre}^2)$ *mht. en akse gennem centrum og vinkelret på ringen*.



Opgave 13 Vis, at en kugle med radius R og massen M har inertimomentet $\frac{2}{5}MR^2$ *mht. en akse gennem centrum*.



Øvelse 2 Translaterisk energi og Rotationsenergi for en kugle der triller

Når en kugle triller ned ad et skråplan, vil den potentielle energi blive gradvist omdannet til kinetisk energi. Den kinetiske energi vil her have to bidrag, nemlig en translatorisk kinetisk energi (den sædvanlige kinetiske energi) og en rotationsenergi. Der vil altså gælde, at

$$E_{pot} = E_{trans} + E_{rot}$$

Kuglens rotations energi kan findes af

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

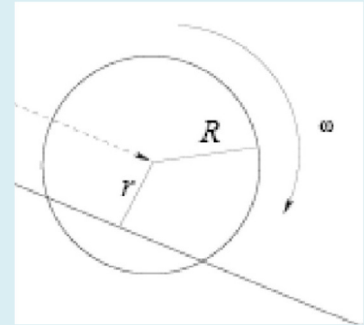
hvor I er kuglens inertimoment, og ω er kuglens vinkelhastighed. Vinkelhastigheden kan findes ud fra hastigheden v som

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Her er R kuglens radius. Nu indsættes det i formlen for rotationsenergi sammen med en kugles inertimoment

$$I = \frac{2}{5} m \cdot R^2 :$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{5} \cdot m \cdot v^2$$



Lav et skråplan med en vis hældning (ikke for stor) ved at sætte et par bøger under et bord. Bestem hældningen α af bordet.

Lad en kugle trille ned ad bordet. Optag en film af kuglen, der triller ned og analyser filmen bagefter, så man får samhørende værdier af tid, sted (både x og y værdi) og hastighed af kuglen.

Beregn derefter E_{pot} , E_{trans} og E_{rot} , og undersøg, om der er energibevarelse. Som nulpunkt kan man vælge, der, hvor kuglen er lavest.

Lav en tilsvarende undersøgelse for to andre hældninger af bordet. Er der forskel på resultatet?

Øvelse 3 Hvad kommer hurtigst ned, en hul eller en fyldt cylinder?

Lad en hul og en fyldt cylinder trille ned ad et skråplan. Undersøg hvad der kommer hurtigst ned. Giv en fysisk forklaring på dette.

3.3 Impulsmoment og kraftmoment

Man kan få et legeme til at bevæge sig, når man påvirker det med en kraft. Man skelner mellem en bevægelse, der flytter legemet, en såkaldt translatorisk bevægelse, og en bevægelse, der får legemet til at rotere. Her vil vi se nærmere på det sidste. En kraft, der påvirker et legeme, kan altså få legemet til at rotere. Det vil have betydning for rotationen, hvor man rent fysisk påvirker legemet. For eksempel kan man ikke få et cykelhjul til at rotere, hvis man påvirker det inde i midten, altså ved navet, man skal derimod påvirke hjulet længere ude fx skubbe til en eger for at sætte hjulet i rotation. Hvis man påvirker hjulet helt ude ved kanten/fælgen, får man den største rotation for en given kraft. For at beskrive dette indfører man en ny fysisk størrelse, der kaldes kraftmomentet.

Vi betragter en situation, hvor man påvirker legemet med en kraft F i afstanden r fra omdrejningsaksen, og vinklen mellem disse to kaldes v .

Kraftmomentet M er defineret som:

$$M = F \cdot r \cdot \sin(v).$$

Man bruger ofte betegnelsen a for kraftens arm, som er den vinkelrette afstand mellem kraftens påvirkning og omdrejningsaksen. Så kan man skrive kraftmomentet som

$$M = F \cdot a = F \cdot r \cdot \sin(v).$$

Hvis man bruger vektorregning¹, kan man definere kraftmomentet vha. krydsproduktet

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$$

Den numeriske værdi af kraftmomentet er da:

$$|\vec{M}| = |\vec{F} \times \vec{r}| = F \cdot r \cdot \sin(v),$$

som vi definerede ovenfor.

Når legemet roterer, indfører man impulsmomentet L til at beskrive bevægelsen. Impulsmomentet er meget tilsvarende impulsen for en translatorisk bevægelse. For en lille del af legemet er impulsmomentet defineret som

$$L_i = p_i \cdot r_i \cdot \sin(\theta),$$

hvor p_i er impulsen, r_i er afstanden til omdrejningspunktet, og θ er vinklen mellem p_i og r_i .

Man får det totale impulsmoment ved at summere over alle de små massedele

$$L = \sum p_i \cdot r_i \cdot \sin(\theta).$$

Impulsmomentet hænger sammen med inertimomentet på denne måde

$$L = I \cdot \omega.$$

Her er ω vinkelhastigheden for rotationen.

Når man differentierer impulsen, der er masse gange hastighed, får man masse gange acceleration, altså kraften. Ser vi på de to definitioner af henholdsvis impulsmoment L og kraftmoment M får vi derfor følgende sammenhæng:

$$M = \frac{dL}{dt}.$$

Her er M summen af de påvirkende kraftmomenter. Denne sætning er helt tilsvarende til Newtons 2. lov for translatorisk bevægelse. Man kan se, at hvis summen af de påvirkende kraftmomenter er lig nul, så vil legemet ikke ændre sin rotation og altså enten ikke rotere eller rotere med en konstant vinkelhastighed.

3.4 Newtons tyngdelov

I 1687 udgiver Isaac Newton sit store værk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, hvilket kan oversættes med *Naturfilosofiens Matematiske Principper*. Heri fremsætter han sin tyngdelov, der siger, at tyngdekraften F mellem to genstande med masserne M og m er givet ved

¹ Efter reformen i 2017 gled vektorregning i 3D, bl.a. med krydsprodukt ud af pensum. I *HEM* ligger de tidligere afsnit om rumgeometri som et projekt i kapitel 7.

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2},$$

hvor r er den indbyrdes afstand, og $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ er en naturkonstant kaldet gravitationskonstanten.

På baggrund af denne lov kan man bl.a. udlede Keplers tre love for planetbevægelserne. Derudover giver Newton et stort bidrag til udviklingen af differential- og integralregningen, der sammen med tyngdeloven giver et værktøj til at forudsige planeternes bevægelse og indbyrdes påvirkning med hidtil uhørt præcision.

Opgave 14 Alle legemer i Solsystemet påvirker hinanden med en gensidig tyngdekraft.

- Beregn tyngdekraften på Månen fra såvel Solen som fra Jorden.
- Hvilken af kræfterne er størst? Hvordan passer det med vores forestilling om, hvordan de tre legemer bevæger sig relativt til hinanden?

Opgave 15 Verdens største containerskib var pr. 2006 Emma Mærsk med en vægt på ca. 176 000 ton. Antag, at to sådanne skibe er placeret 100 m fra hinanden.

- Beregn tyngdekraften mellem skibene.
- Vil du være i stand til at forhindre det ene af skibene i at bevæge sig mod det andet?

3.5 Potentiell energi i tyngdefeltet fra en punktmasse

Vi vil nu beregne den potentielle energi af en genstand med masse m , som befinder sig i afstanden r fra et legeme med massen M . Vi ønsker at flytte det et positivt stykke dr radialt væk fra legemet. Dertil skal bruges en kraft, der modsvarer tyngdekraften mellem de to legemer. Kraftens arbejde er da givet ved

$$A(r) = F \cdot dr = G \frac{M \cdot m}{r^2} dr.$$

Arbejdet er naturligvis afhængigt af, hvor genstanden befinder sig, dvs af r . Ændringen i den potentielle energi under denne proces er $dE_{\text{pot}}(r) = A(r)$. E_{pot} er ligeledes afhængig af r , og man vil gerne have, at den potentielle energi uendeligt langt fra et legeme er nul – bl.a. for at sikre, at der er overensstemmelse med vores intuition. Med den betingelse kan et udtryk for E_{pot} nu beregnes:

² Udregningen bygger på, at tyngdekraften fra et legeme kan regnes som om al massen var placeret i tyngdepunktet. Dette gælder kun eksakt, hvis legemet er sfærisk symmetrisk (hvilket fx Solen og Jorden er med meget god tilnærmelse) eller hvis man er meget langt fra legemet sammenlignet med legemets udstrækning.

$$dE_{\text{pot}}(r) = A(r) = G \frac{Mm}{r^2} dr$$

$$\int_{E_{\text{pot}}}^0 dE_{\text{pot}}(x) = \int_r^{\infty} G \frac{Mm}{x^2} dx = GMm \cdot \int_r^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$0 - E_{\text{pot}}(r) = GMm \cdot \left[-\frac{1}{x} \right]_r^{\infty} = GMm \cdot (0 - (-\frac{1}{r}))$$

$$E_{\text{pot}}(r) = -G \frac{Mm}{r}$$

Hermed har vi udledt en formel for den potentielle energi af en punktformet genstand i et tyngdefelt.

3.6 Potentiel energi af en homogen kugle

Solen blev dannet ved sammentrækning af en gigantisk gasky. Under sammentrækningen mistede skyen potentiel energi, hvoraf halvdelen blev udstrålet som varmestråling, mens den anden halvdel gik til at varme gassen op.

Vi vil nu bruge udtrykket for den potentielle energi for en genstand i et tyngdefelt til at beregne den potentielle energi af denne gasky. For at forsimpler udregningerne antager vi, at kuglen er homogen; dvs. at den har samme densitet overalt.

Vi vil altså forestille os et legeme med massen M og radius R , der overalt har den konstante densitet $\rho = M/V$ givet ved:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}.$$

Massen af legemet kan altså skrives som $M = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} R^3$, og da densiteten jo er konstant, er massen indenfor

en radius r tilsvarende givet ved $m(r) = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3$.

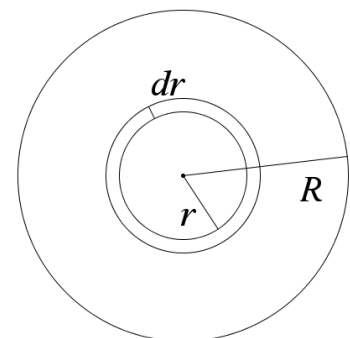
Figuren viser en kugleskal med tykkelse dr i afstanden r fra centrum af legemet. Massen af kugleskallen er $dm = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$.

Man kan vise, at hvis massen er symmetrisk fordelt (hvilket jo specielt er tilfældet for en homogen kugle), så er det kun massen $m(r)$ indenfor radius r der påvirker en genstand i denne afstand. Tilsvarende er det kun denne masse, der er relevant for den potentielle energi.

Kugleskallens potentielle energi er altså

$$dE_{\text{pot}} = -G \frac{m(r) dm}{r}.$$

Den samlede potentielle energi får man ved at integrere udtrykket ud til radius af legemet R (Gør selv omhyggeligt rede for hvert trin i omskrivningen):



$$\begin{aligned}
 E_{\text{pot}} &= \int_0^R -G \frac{m(r) dm}{r} \\
 &= \int_0^R -G \frac{\rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr}{r} \\
 &= \int_0^R -G \frac{16\pi^2 \rho^2}{3} \cdot r^4 dr \\
 &= -G \frac{16\pi^2 \rho^2}{3} \cdot \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^R \\
 &= -G \frac{16\pi^2 \rho^2}{3} \cdot \frac{1}{5} R^5
 \end{aligned}$$

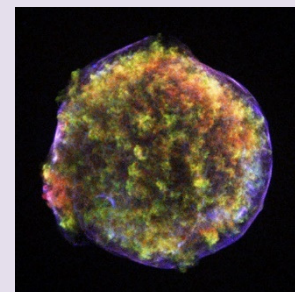
Vi omskriver nu det sidste udtryk, idet vi gerne vil have indført massen M (se ovenfor)

$$\begin{aligned}
 E_{\text{pot}} &= -G \frac{16\pi^2 \rho^2}{3} \cdot \frac{1}{5} R^5 \\
 &= -\frac{3}{5} G \frac{\frac{4\pi}{3} \rho R^3 \cdot \frac{4\pi}{3} \rho R^3}{R} \\
 &= -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}
 \end{aligned}$$

Opgave 16 Solen dannes ud fra en enorm gassky, der over en lang periode trækker sig sammen. Antag, at gasskyen falder sammen til en homogen kugle med Solens masse og radius.

- Beregn den frigivne potentielle energi under sammentrækningen af gasskyen.
- Hvor længe kan gasskyen lyse med Solens lysstyrke, hvis al energien skal komme fra gravitationel potentiel energi?

Opgave 17 Kæmpestjerner dør med maner! De ender deres dage i en enorm eksplosion kaldet en *supernova*. I denne eksplosion slynges størstedelen af stjernens masse ud i det interstellare rum, mens kernen falder sammen til et sort hul eller en neutronstjerne. Neutronstjerner er supermassive objekter, der næsten udelukkende består af neutroner. Man kan forestille sig en enorm atomkerne bestående af omkring 10^{57} neutroner.



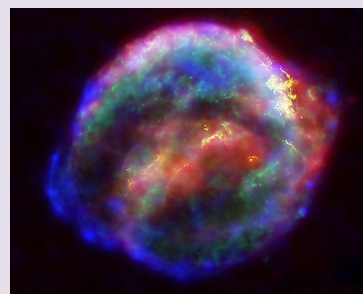
Antag, at der dannes en neutronstjerne med en radius på 10 km og en masse på 1,4 gange Solens masse.

Tycho Brahes *Stella Nova* opdaget 1572

- c) Beregn den frigivne potentielle energi.

Supernovaens energi udsendes i løbet af nogle måneder.

- d) Beregn, hvor meget energi Solen udsender på et år.
- e) Giv et overslag af hvor mange stjerner af Solens type, der skal til for i løbet af et år at udsende den samme energi som en supernova. Sammenlign med, at man regner med, at vores galakse Mælkevejen består af ca. 200 mia. stjerner.



Keplers supernova
opdaget 1604

Opgave 18 Den nydannede Jord antages at have været så varm, at den i mange millioner år var flydende.

- a) Beregn, hvor meget potentiel energi der blev frigivet, da Jorden blev dannet.

Halvdelen af den potentielle energi udsendes som varmestråling, mens resten går til opvarmning af Jorden. Antag at ca. en tredjedel af Jorden er jern, mens resten består af klippe (granit eller basalt).

- b) Vil det være nok til at opvarme Jorden til smeltepunktet?

3.7 Frit fald i tyngdefeltet

Jorden befinder sig i Solens tyngdefelt, så hvorfor falder vi ikke ind i Solen? Spørgsmålet er nærliggende, for ser vi på stort set hvad som helst i vores omgivelser, falder de jo ind mod Jorden i det øjeblik, der ikke er noget til at holde dem på plads. Fx vil en bold i vores hånd falde i samme øjeblik, vi giver slip på den. Jorden reddes af, at den samtidig har en hastighed i sin bane, for selvfølgelig falder den. Faldet bliver bare til en ellipse rundt om Solen.

Men hvad ville der ske, hvis vi nu var i et rumskib i samme afstand som Jorden, men så pludselig bremsede op. Med hvilken fart ville rumskibet falde ind mod Solen, og hvor lang tid ville det tage?

Vi har vores rumskib med masse m i afstanden r_0 fra Solen. Solens masse er M . Al bevægelse foregår langs en akse fra Solens centrum og ud til rumskibet. Afstand, hastighed og acceleration regnes positivt i retningen væk fra Solen. Rumskibets starthastighed er nul, og vi vil se på faldet indtil afstanden r , hvor hastigheden vil være v .

Rumskibets acceleration er givet ved

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} v^2 \right).$$

Rumskibet påvirkes kun af tyngdekraften, der altså er den resulterende kraft. Vi har så (*gør selv omhyggeligt rede for hvert trin i omskrivningen*):

$$F_{\text{res}} = F_{\text{tyngde}}$$

$$m \cdot a = -G \frac{Mm}{r^2}$$

$$a = -G \frac{M}{r^2}$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -G \frac{M}{r^2}$$

$$\int_0^v \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) dr = \int_{r_0}^r -G \frac{M}{r^2} dr$$

$$\left[\frac{1}{2} v^2 \right]_0^v = \left[G \frac{M}{r} \right]_{r_0}^r$$

$$\frac{1}{2} v^2 = G \frac{M}{r} - G \frac{M}{r_0}$$

Opgave 19 Omskriv ovenstående ligning og argumenter for, at vi bare har vist, at den mekaniske energi er bevaret.

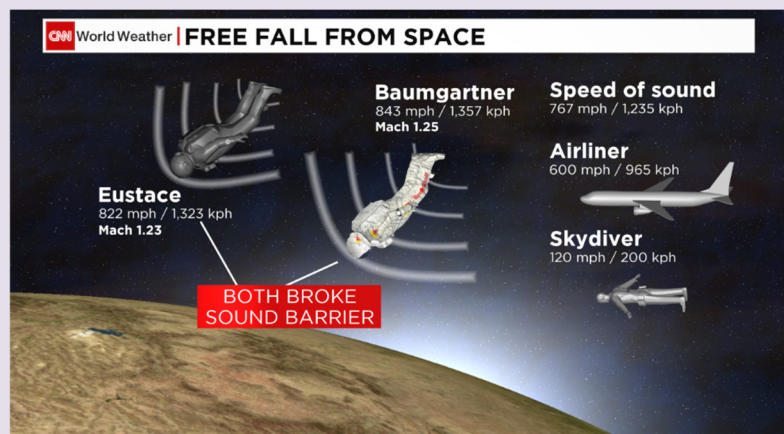
v isoleres i ligningen ovenfor og vi får (idet vi husker, at v er negativ, når rumskibet bevæger sig mod Solen):

$$v = -\sqrt{2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$$

Opgave 20 Vis ovenstående formel.

Opgave 21 En af cheferne hos Google, Alan Eustace, slog i 2014 rekorden for det højeste udspring med et spring fra 41000 meter. Med hvilken fart ville han ramme jorden, hvis man ser helt bort fra luftmodstanden?

Grafik fra CNN, der sammenligner forskellige hastigheder gennem luften:



(I HEM 3, kapitel 3A, afsnit 3.5 er der en detaljeret gennemgang af det spring Felix Baumgartner foretog i 2012. I gennemgangen inddrages luftmodstand, atmosfæriske forhold, ændring i tyngdekraft som funktion af højden mv)

Ovenstående udtryk for hastigheden er en differentialligning, som vi kan løse ved separation af de variable. (Teknikken og teorien bag denne metode er gennemgået i HEM 3, kapitel 3B, afsnit 3):

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} dr = -\sqrt{2GM} dt$$

Integration på begge sider giver nu:

$$-\int \sqrt{2GM} dt = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} dr$$

$$-\sqrt{2GM} \cdot t + k = -r_0 \cdot \left(\sqrt{r_0} \cdot \tan^{-1} \left(\sqrt{r_0} \cdot \sqrt{\frac{-(r-r_0)}{r_0 r}} \right) + r \sqrt{\frac{-(r-r_0)}{r_0 r}} \right)$$

Integralet på højre side er langt fra simpelt. Det kan findes vha. et CAS-værktøj, og da det giver et eksakt funktionsudtryk, findes der også en metode til at beregne det i hånden: Metoden bygger på kendskab til de afledede funktioner af de trigonometriske arcus-funktioner (de omvendte funktioner til cos, sin og tan). (Du kan finde et projekt om dette i HEM 3, kapitel 7).

Til tiden $t=0$ skal afstanden være lig r_0 , hvilket giver os:

$$-0 + k = -r_0 \cdot \left(\sqrt{r_0} \cdot \tan^{-1}(0) + r_0 \sqrt{0} \right)$$

$$k = 0$$

Faldtiden kan nu skrives som:

$$t = \frac{r_0}{\sqrt{2GM}} \left(\sqrt{r_0} \cdot \tan^{-1} \left(\sqrt{r_0} \cdot \sqrt{\frac{-(r-r_0)}{r_0 r}} \right) + r \sqrt{\frac{-(r-r_0)}{r_0 r}} \right)$$

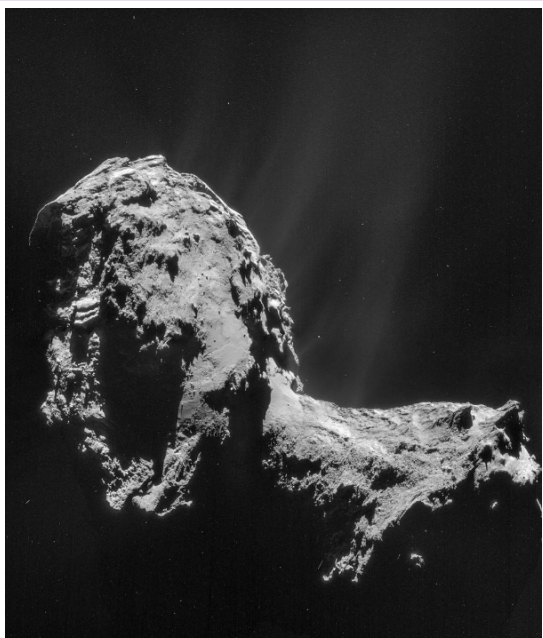
Opgave 22 I august 2014 nåede rumfartøjet Rosetta frem til kometen med det mundrette navn P67/Tjurjumov-Gerasimenko. Fartøjet kredsedde om kometen i et par måneder, og d. 12. november frigjordes det mindre fartøj Philae, som efterfølgende landede på kometen.

P67/Tjurjumov-Gerasimenkos masse er estimeret til $1.0 \cdot 10^{13}$ kg og, som det kan ses på billedet, er overfladen meget ujævn. Dens udstrækning er omtrent 4 km x 3,5 km x 3,5 km. Philae blev frigjort i ca. 41 km højde over kometen.

- a) Vurdér, med hvilken hastighed Philae rammer kometens overflade, hvis vi antager, at rumsonden falder frit.

Philae var bygget, så den kunne absorbere det meste af stødet. Den havde desuden to harpuner, der ved landingen skulle skydes ned i overfladen for at forhindre, at sonden prellede af på kometen. Af en eller anden grund virkede harpunerne ikke, og Philae lavede to hop, inden den til sidst stod fast på kometen. Det første hop varede 1 time og 50 minutter, og bragte sonden op i en højde af ca. 1 km. Det andet hop varede kun 7 min.

- b) Undersøg, om oplysningerne om det første hop stemmer overens med teorien.
c) Hvis tiden for hoppet er den mest pålidelige, hvad er så den rigtige højde for det første hop?
d) Hvor højt hoppede rumsonden anden gang?



Kometen P67/Tjurjumov-Gerasimenko og Rosetta satellitten. Foto: www.nasa.gov.

Opgave 23

- a) Hvor lang tid tager det for supertankerne i øvelse 3.2 at bevæge sig, så de mødes.
b) Antag at Romeo står under Julies balkon, som befinder sig 3,5 m over ham. Hvor lang tid vil det tage de to at finde hinanden, hvis tyngdekraften alene skal klare problemet?

3.8 Strålingslovene og deres sammenhæng

Når man analyserer lyset fra en stjerne, kan man bestemme mange fysiske størrelser for stjernen, såsom massen, alderen, grundstofsammensætningen etc. Udstrålingen fra en stjerne er bestemt af de såkaldte strålingslove, der gælder for termisk stråling. Derudover skal man også bruge viden om fx absorption af stråling samt dopplereffekten. I dette afsnit vil vi kun se på strålingslovene og deres sammenhæng.

Man taler om tre strålingslove, der gælder for termisk stråling fra et sort legeme. Det kan lyde lidt underligt, at en stjerne skulle være et sort legeme, men et sort legeme betyder, at legemet ikke reflekterer noget stråling, og det passer godt på en stjerne.

Den første lov er også kendt som Plancks lov, og den fortæller om intensiteten af strålingen, I , som funktion af bølgelængden, λ . Strålingen vil følge en såkaldt Planck-kurve. Plancks lov siger

$$I(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda \cdot k \cdot T}} - 1}$$

Her er h Plancks konstant, c er lyshastigheden, λ er bølgelængden, k er Boltzmanns konstant, og T er den absolutte temperatur. Intensiteten har enheden W/m^3 .

Integrerer man intensitetsfunktionen over alle bølgelængder, får man stjernens totaludstråling. Det er dog ikke så let at gøre, se opgave senere.

Den anden strålingslov er Wiens forskydningslov, der fortæller ved hvilken bølgelængde, kaldet λ_{\max} , stjernen udsender mest lys, når den har den absolutte temperatur, T :

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2,9 \cdot 10^6 \text{ nm} \cdot \text{K}$$

Hvis man differentierer Plancks lov kan man finde frem til dette for en fast temperatur.

Tredje og sidste lov hedder Stefans lov, og den lyder

$$F = \sigma \cdot T^4,$$

hvor T igen er den absolutte temperatur, F er fluxen målt i W/m^2 og σ er Stefans konstant. Hvis man så skal have stjernens totaludstråling, skal man gange fluxen med overfladearealet af stjernen. Så får man

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

hvor R er stjernens radius. Størrelsen L er stjernens totaludstråling og kaldes også luminositeten.

Opgave 24

I denne opgave vil vi undersøge integralet $\int_0^{\infty} I(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda \cdot k \cdot T}} - 1} d\lambda$

For at løse det, skal vi først bestemme en stamfunktion, altså

$$\int \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda \cdot k \cdot T}} - 1} d\lambda = 2hc^2 \int \frac{1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda \cdot k \cdot T}} - 1} d\lambda$$

Hvis man laver approksimationen:

$$e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1 \approx e^{\frac{hc}{\lambda k T}},$$

hvilket er sandt for bølgelængder nær maksimalbølgelængden, får man

$$\int_0^{\infty} I(\lambda) d\lambda = 2hc^2 \int \frac{1}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} d\lambda.$$

- a) Forklar hvorfor.
b) Lav substitutionen

$$u = \frac{hc}{\lambda kT},$$

og vis, at integralet kan skrives som

$$2ckT \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \int u^3 \cdot e^{-u} du$$

- c) Dette integral kan løses vha. partiel integration (se HEM 3, kapitel 2, afsnit 3). Vis, at selve stamfunktionen giver

$$\int u^3 \cdot e^{-u} du = (-u^3 - 3u^2 - 6u - 6) \cdot e^{-u}$$

Nu vil vi gå tilbage til det bestemte integral, som vi vil skrive op som

$$2ckT \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \int_0^a u^3 \cdot e^{-u} du$$

Her er den øvre grænse kaldt a , som vi først vil indsætte og senere vil vi lade a gå mod uendelig.

- d) Vis, at selv integralet giver

$$\int_0^a u^3 \cdot e^{-u} du = 6 - (a^3 + 3a^2 + 6a + 6) \cdot e^{-a}$$

- e) Bestem grænseværdien af integralet for a gående mod uendelig, (svaret er 6).
f) Hvis man ikke laver approksimationen og beholder uendelig i grænsen, så får man integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{u^3}{e^u - 1} du.$$

Løs integralet på dit CAS værktøj, og vurder, hvor god approksimationen var.

- g) Vis, at intensiteten er proportional med temperaturen i 4, altså $I = \text{konstant} \cdot T^4$

Hvis man integrerer dette op over alle retninger, så får man den totale flux. Altså Stefans lov.

Opgave 25 Udregn Solens totaludstråling, altså Solens luminositet. Slå relevante værdier op i databogen.

Beregn, hvor stor en flux i W/m^2 , det giver i gennemsnit her på Jorden, når Jordens gennemsnitsafstand er 149,6 mio. km. Antag, at strålingen fordeles ligeligt på en kugleskal med den radius.

Jordens gennemsnitlige temperatur er ca. 14 °C. Beregn Jordens flux, og sammenlign med fluxen fra Solen. Man siger, at Jorden udstråler ca. det samme som den modtager fra Solen. Hvilke faktorer har vi ikke taget højde for i denne beregning?

Opgave 26 Antag, at strålingen fra din krop følger Planck-fordelingen. Ved hvilken bølgelængde udsender du da mest energi? I hvilken del af det elektromagnetiske spektrum findes denne form for stråling?
Gør det samme for Solen.

Opgave 27 Vælg en fast temperatur, fx Solens overfladetemperatur og bestem vha. differentialregning maksimum for intensitetsfunktionen, altså λ_{\max} . Sammenlign med den temperatur, du kan beregne ud fra Wiens lov.

Opgave 28 Stjernen Rigel i stjernebilledet Orion har en radius på ca. 78 gange Solens radius. Rigels luminositet er ca. 66.000 gange større end Solens. Hvad er Rigels overfladetemperatur?

Opgave 29 En af de klareste stjerner vi kan se fra Jorden er Betelgeuse fra stjernebilledet Orion. Det er en super kæmpestjerne med en masse på ca. 20 gange Solens masse. Ifølge databogen 10. udgave er afstanden til Betelgeuse ca. 650 lysår, og den har en overfladetemperatur på 3300 K og en luminositet på 190.000 gange Solens luminositet.

- Bestem ved hvilken bølgelængde Betelgeuse udsender mest stråling. Hvilken farve har den så?
- Bestem Betelgeuses radius. Hvilke planeter ville den opsluge, hvis man placerede den på Solens plads i Solsystemet?

3.9 SRP

Emnerne i kapitlet er meget velegnede til SRP i matematik og fysik.

Opgaveformulering: Stjerner

Redegør for udstrålingen, specielt det kontinuerte spektrum, fra en stjerne. Planlæg og udfør eksperimenter til eftervisning af Plancks strålingslov og T^4 -loven. Analysér og vurder dine resultater og sammenlign dem med teorien.

Forklar om stjernedannelse, og gør rede for betingelserne for hydrostatisk ligevægt i en stjerne. Lav nedenstående opgave.

Beskriv forskellige stjernetyper og skitsér stjernernes udvikling.

Gør undervejs rede for den anvendte matematik, specielt ønskes partiel integration og metoden separation af de variable bevist.

Besvarelsen skal have et omfang på 15 – 20 sider eksklusiv bilag.

Opgave

Antag, at massefylden er konstant igennem Solen og lig Solens gennemsnitlige massefylde.

Løs differentiaalligningen for hydrostatisk ligevægt ved separation af de variable. Sæt trykket til 0 ved Solens overflade.

Beregn trykket i Solens indre i denne model og diskuter dit resultat, når mere realistiske modeller giver værdien $2,3 \cdot 10^{11}$ atm.

Fag: Matematik A og Fysik A

Opgaveformulering: Big Bang

Præsenter Friedmann-ligningerne og giv via den klassiske mekanik en begrundelse for deres udseende. Under forskellige antagelser om Universets tæthed og geometri skal du løse ligningerne, idet du præsenterer såvel analytiske som numeriske løsninger. Til numeriske løsninger skal du desuden vurdere fejlene ved metoden.

Du kan nøjes med undervejs kort at kommentere metoden for separation af de variable mens metoden til numerisk integration og fejlvurdering skal have en grundig behandling. Du afgør selv hvilke sætninger du vælger at bevise.

Sammenlign de forskellige modeller mht. udvikling og alder for Universet.

Kapitel 5. Vektorer og analytisk geometri i plan og rum

Vektorer bruges i fysik til at beskrive mange forskellige fysiske størrelser, som fx hastighed, kraft. I dette afsnit vil vi se på nogle af anvendelserne af vektorer inden fysikken. Der er først et afsnit om kraft og arbejde, samt lorentzkraften. Derefter ses på biler og kræfter på biler bl.a. i et sving.

Til sidst er der 3 afsnit om det skrå kast, som bygger på afsnit 2.2 fra 2.g materialet. Afsnittet her kan dog godt læses uafhængigt. Her tages fat på korrektioner til det skrå kast, først luftmodstand, derefter både luftmodstand og skru i bolden.

5.1 Kraft og arbejde

Man kan med fordel bruge en vektorbeskrivelse mange steder i fysik, ikke mindst i mekanikken. Kræfter er egentlig vektorer, idet de både har en størrelse og retning. Når man lægger kræfter sammen, svarer det til at lægge vektorer sammen.

Arbejde defineres i fysik som

$$A = F \cdot \Delta s \cdot \cos(\nu)$$

Hvor F er kraftens størrelse, Δs er den tilbagelagte vejlængde og ν er vinklen mellem kraft og vejlængde. Dette kan ses at være det samme som skalarproduktet for to vektorer. Man kan derfor lige så godt skrive

$$A = \vec{F} \cdot \vec{\Delta s}.$$

En kraft, der udfører et arbejde på en genstand vil virke med en vis effekt. Der gælder, at

$$P = \frac{dA}{dt}.$$

Definitionen af arbejde indsættes i dette udtryk U og kædereglen (for vektorfunktioner) anvendes

$$P = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{\Delta s})}{dt} = \frac{d\vec{F}}{dt} \cdot \vec{\Delta s} + \vec{F} \cdot \frac{d(\vec{\Delta s})}{dt}.$$

Hvis kraften er konstant, vil første led give nul. Nu kan vi indsætte sammenhængen

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{\Delta s})}{dt},$$

hvor \vec{v} er hastighedsvektoren. Det giver

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Opgave 30 En pige trækker en kælk med en konstant kraft på 24 N. Hun trækker i en snor, der danner en vinkel på 50° med vandret. Hun trækker kælken 500 m. Vi ser først bort fra gnidning.

- Beregn det arbejde hun udfører på kælken.
- Beregn tyngdekraftens arbejde på kælken.

Nu vil vi tage hensyn til gnidningskraften, som er 8 N. Gnidningskraften er vandret og virker modsat bevægelsen.

- Hvad er den resulterende kraft på kælken? Angiv den som en vektor
- Beregn den resulterende krafts arbejde.

Øvelse 4 Gnidningskraftens arbejde

Formålet med forsøget er at undersøge gnidningskraftens arbejde på en klods, der glider hen over gulvet og dermed efterviser det teoretiske udtryk for en krafts arbejde $A = F \cdot s \cdot \cos(\nu)$, hvor F er kraften, s er den strækning, klodsens bevæger sig, og ν er vinklen mellem kraft og bevægelsesretning.

Først skal I måle gnidningskraften F_{gnid} på klodsens. Det gøres ved at trække den hen over gulvet med konstant fart. Klodsens trækkes med en kraftmåler, og kraften kan så aflæses direkte.

Stil to fotoceller op med en kendt afstand Δs imellem. Giv klodsens et skub, så den passerer vinkelret gennem fotocellerne og fortsætter uhindret henad gulvet, til den ligger stille. Mål passagetiden mellem fotocellerne Δt samt strækningen fra fotocellerne til der, hvor klodsens ender s .

Klodsens fart v og kinetiske energi E_{kin} kan bestemmes ud fra følgende udtryk

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{og} \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Når klodsens ligger stille er dens kinetiske energi 0, så der må gælde at

$$E_{\text{kin}} + A_{\text{gnid}} = 0,$$

hvor gnidningskraftens arbejde er $A_{\text{gnid}} = -F_{\text{gnid}} \cdot s$. En lille omskrivning giver

$$E_{\text{kin}} = F_{\text{gnid}} \cdot s.$$

Udfør forsøget for så mange forskellige værdier af E_{kin} og s som muligt, og indsæt punkterne i et koordinatsystem. Med et passende valg af akser skulle man få en lineær sammenhæng og hældningskoefficienten burde være lig med F_{gnid} .

Sammenlign de to bestemmelser af gnidningskraften.

Eksempel på data:

Strækning målt i meter.	Tid omregnet til sekunder.
0,375 m.	0,01984 s.
0,653 m.	0,01607 s.
0,835 m.	0,014745 s.
0,06 m.	0,04946 s.
0,63 m.	0,01791 s.
1,36 m.	0,01007 s.
0,253 m.	0,02419 s.
0,505 m.	0,01931 s.
0,91 m.	0,01347 s.
1,137 m.	0,01206 s.

Gnidningsmodstanden blev målt med kraftmåleren til 0,3 N.
Loddet havde en vægt på 100 g.
Afstanden mellem fotocellerne var på 3 cm.

Opgave 31 Denne opgave er en del af opgave 3 fra eksamenssættet d. 16. august 2012.

En Segway kører med konstant fart op ad en bakke, der hælder $8,0^\circ$ med vandret. Den samlede masse af Segway med fører er 145 kg. Luftmodstand, gnidning i lejer og rullemodstand giver en bagudrettet kraft med størrelsen 130 N. Indtegn i et koordinatsystem pile, der viser størrelse og retning af de kræfter, der virker på Segwayen, mens den kører op ad bakken.

Her skal man vide, at hvis Segwayen kører med konstant fart, så er den resulterende kraft lig nul.

Start med at udregne tyngdekraften på Segway med fører.

Indtegn nu tyngdekraften og gnidningskraften i et passende koordinatsystem. Konstruer derefter en vektor, der repræsenterer motorkraften fra Segwayen, således at den resulterende kraft på Segwayen er nul.



5.2 Lorentz kraften

Når en partikel med ladningen q bevæger sig i et magnetfelt, \vec{B} , vil partiklen blive påvirket af en kraft givet ved

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B},$$

hvor \vec{v} er partiklens hastighedsvektor. Hvis hastighedsvektoren og magnetfeltet er vinkelret på hinanden, vil partiklen udføre en jævn cirkelbevægelse.

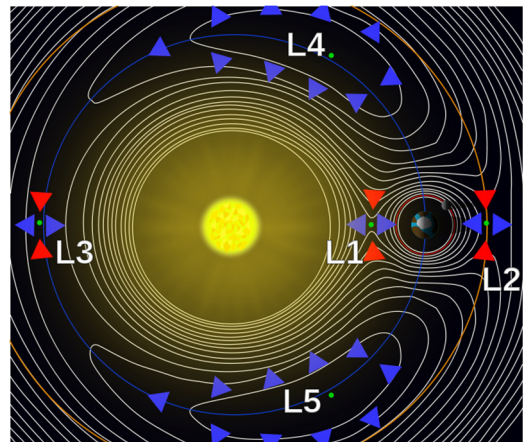
Nordlys er et eksempel på ladningers bevægelse i et magnetfelt. Der kommer hele tiden en strøm af ladede partikler fra Solen, dette kaldes solvinden. Den består for det meste af elektroner og ioner, typisk protoner. I gennemsnit er det ca. 7 ioner og 7 elektroner på cm^3 med en hastighed på omkring 400 km/s, men der er store variationer i både tæthed og hastighed.



Nordlys over Sisimiut i Grønland

Vi måler hele tiden denne solvind for at vide, om der pludselig kommer flere partikler end ellers. Man kan fx på hjemmesiden <http://www.spaceweather.com/> se tætheden og hastigheden af øjeblikkelige solvind. Siden opdateres hvert 10. minut. Data kommer fra ACE satellitten, der er placeret i *Lagrange punktet L1* mellem Jorden og Solen. På ACE satellittens hjemmeside kan man følge solvinden i flere detaljer.

Når disse partikler i solvinden rammer Jordens magnetfelt, vil de blive fanget i Van Allen bæltene. Partiklerne vil bevæge sig ned i atmosfæren tæt ved Jordens magnetiske poler, hvor feltlinjerne er tættest.³ Når partiklerne bevæger sig i Jordens magnetfelt, vil de blive afbøjet pga. Lorentzkraften. Her vil ikke gælde, at hastighed og magnetfelt er vinkelret på hinanden.



I Lagrangepunkterne er gravitationskræfterne i ligevægt, så en satellit kan blive hængende der

Man kan imidlertid dele hastighedsvektoren op i en komponent, der er vinkelret på magnetfeltet og en komponent, der er parallel med magnetfeltet. Komponenten vinkelret på magnetfeltet giver en kraft, der vil give en jævn cirkelbevægelse, mens komponenten parallel med magnetfeltet giver en kraft, der er nul. Hastigheden parallel med magnetfeltet vil altså ikke ændres, da der ingen kraft er. Tilsammen giver det en spiralbevægelse af partiklen. De ladede partikler vil altså bevæge sig ned igennem Jordens atmosfære i spiralbaner. Undervejs vil partiklerne ramme ind i atomerne i atmosfæren og excitere disse, når de så falder tilbage til grundtilstanden, vil de udsende lys. Dette lys kaldes **nordlys** eller **sydlys**.

5.3 Kurvekørsel

Når en bil eller et andet køretøj kører igennem et sving, vil bilen blive påvirket af en centripetalkraft. Den kraft modvirkes af gnidningskraften mellem dæk og vejbane. Centripetalkraften er givet ved

$$F_c = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

hvor m er massen af bilen, v er hastigheden, og r er radius af svinget. Gnidningskraften er givet ved

$$F_{\text{gnid}} = \mu \cdot F_N,$$

hvor μ er gnidningskoefficienten, og F_N er normalkraften. For en normal familiebil er normalkraftens størrelse lig med tyngdekraftens størrelse. Gnidningskoefficienten afhænger af vejbanen, dæktypen og ikke mindst af om vejen er våd eller tør. Man skal her bruge den statiske gnidningskoefficient.

Opgave 32 Et sving har en radius på 65 m. Bilen vejer 1100 kg inklusiv fører. Vejen antages at være tør. Find en passende værdi for gnidningskoefficienten i databogen og udregn, hvor hurtigt bilen kan køre gennem svinget.

³ I virkeligheden er det meget mere kompliceret, men her nøjes vi med dette simple billede.

Hvor hurtig kan bilen køre, hvis vejbanen er våd?

Nu vil vi kigge på situationen, hvor svinget hælder ϕ grader ind mod centrum. Her må man så bruge vektorregning. Gnidningskraften er parallel med vejbanen, og normalkraften er vinkelret på vejbanen.

Opgave 33 Dette er en fortsættelse af forrige opgave. Svinget hælder 25° .

Indtegn alle kræfterne, der virker på bilen.

Opløs vektorerne i komponenter vandret og lodret.

Brug dette til at beregne med hvilken hastighed, man kan køre i svinget, når vejen er tør.

For en formel 1 racerbil kommer der endnu en kraft til. Det er den såkaldte *downforce*, som kommer pga. bilens udformning. Det er en kraft, der er helt tilsvarende til den kraft, der betyder, at flyvemaskiner kan flyve. Her vil vi kalde kraften F_D .

Denne kraft er givet ved udtrykket

$$F_D = \frac{1}{2} \rho \cdot C_D \cdot A \cdot v^2.$$

Her er ρ luftens densitet, A er bilens tværsnitsareal set forfra, og v er farten. C_D er en faktor, der afhænger af bilens udformning, den kaldes formfaktoren. Bilerne er udformet på en måde, så de får en passende downforce. Denne kraft vil give en øget normalkraft med størrelsen

$$F_{normal} = F_t + F_D$$



Man kan naturligvis ikke bare ringe til et formel 1 team og få oplyst værdierne for A og C_D , det er jo en stor hemmelighed fra team til team, hvilke værdier, de enkelte biler har. Det er heller ikke konstanter igennem alle løbene, da banerne er forskellige mht. fordelingen af sving og lige strækninger. Alt efter hvilken bane, man skal køre på, så justeres bilens vinger og giver mere eller mindre downforce. Som et mål kan man bruge oplysningen om, at ved hastigheden på ca. 160 km/h kan en formel 1 racerbil køre på hovedet, dvs. at $F_D = F_t$. Luftens densitet kan sættes til $\rho = 1,20 \text{ kg/m}^3$ ved 20°C .

Opgave 34 Brug oplysningen til at beregne en værdi for $A \cdot C_D$. Massen af en formel 1 bil er mindst 702 kg (i 2015 sæsonen).

Formel 1 biler kører også på særlige dæk med en høj gnidningskoefficient. Vi vil her sætte den til 1, selvom den kan variere meget alt efter dæktype og vejtemperatur.

Hvor hurtigt kan en formel 1 racer køre igennem et sving med en radius på 30 m?

5.4 Det skrå kast med luftmodstand

Teorien bag det skrå kast er blevet behandlet i 2. g materialet. Her kommer først en kort beskrivelse, hvor man anvender vektorer. Vi vil starte med at se bort fra alle andre kræfter end tyngdekraften. Den samlede (resulterende) kraft er altså

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_t$$
$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g}$$

Dette giver accelerationsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix},$$

hvor g er tyngdeaccelerationen, og t er tiden. Integrerer man dette udtryk, får man hastighedsvektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ -g \cdot t + v_{0y} \end{pmatrix}$$

Længden af hastighedsvektoren, også kaldet farten, er givet ved

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Hastighedsvektorens retning er langs tangenten til kurven. Integrerer man en gang til, får man stedvektoren

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} v_{0x} \cdot t + x_0 \\ -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t + y_0 \end{pmatrix}$$

Her er begyndelsesstedet og begyndelseshastigheden

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

hvor α er startvinklen.

Nu vil vi i inddrage de andre kræfter, der kan virke, hvis man fx kaster en bold i et skråt kast. Vi vil først kigge på luftmodstanden. I mange tilfælde vil en realistisk model for luftmodstanden for bolde, der kastes gennem luften, være, at luftmodstanden vokser med farten i anden potens. Retningen af luftmodstanden vil altid være modsatrettet bevægelsen, altså modsatte retning af hastighedsvektoren. For lettere at kunne

beskrive dette, indføres en enhedsvektor, der peger langs tangenten i samme retning som hastighedsvektoren. Denne vektor kalder vi \vec{e}_t ⁴. Nu kan luftmodstanden beskrives som

$$\vec{F}_{\text{luft}} = -\frac{1}{2}\rho \cdot A \cdot C_D \cdot v^2 \cdot \vec{e}_t.$$

Her er ρ luftens densitet, A er boldens tværsnitsareal, og v er farten, altså længden af hastighedsvektoren. C_D er en faktor, der afhænger af genstandens udformning. Denne faktor kaldes på dansk formfaktoren, på engelsk kaldes den 'drag coefficient', da luftmodstand kaldes 'drag'.

Når denne kraft inkluderes i den samlede kraft får man et meget mere kompliceret billede, da man ikke længere kan behandle x - og y -koordinaterne uafhængigt af hinanden. Accelerationen bliver

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} - \frac{1}{2}\rho \cdot A \cdot C_D \cdot v^2 \cdot \vec{e}_t$$

For at kunne omskrive dette til koordinater, skal vi finde koordinater til enhedsvektoren. Vi indfører derfor vinklen ψ som vinklen mellem tangenten og vandret. I begyndelsen er denne vinkel lig startvinklen α , men dette ændres undervejs. Der ved bliver koordinaterne til enhedsvektoren

$$\vec{e}_t = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix}$$

Hvis vi sætter startstedet ved (0, 0) bliver ligningen for accelerationen

$$m \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} m \cdot \frac{dv_x}{dt} \\ m \cdot \frac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\rho \cdot A \cdot C_D \cdot v^2 \cdot \cos(\psi) \\ -\frac{1}{2}\rho \cdot A \cdot C_D \cdot v^2 \cdot \sin(\psi) - m \cdot g \end{pmatrix}$$

Nu omskrives dette til to differentialligninger

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho \cdot A}{2m} \cdot C_D \cdot v^2 \cdot \cos(\psi) \\ -\frac{\rho \cdot A}{2m} \cdot C_D \cdot v^2 \cdot \sin(\psi) - g \end{pmatrix}$$

For at kunne løse problemet, skal man have også bruge sammenhængen mellem stedet og hastighedsvektoren

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Et godt eksempel på en bevægelse med luftmodstand kunne være et badmintonslag.

Øvelse 5 Måling af C_D for en fjerbold.

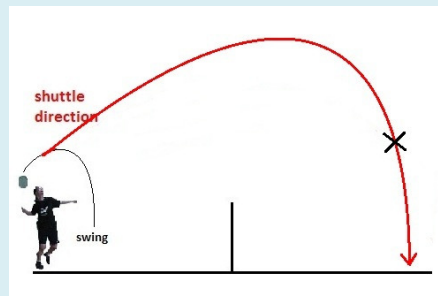
Hvis man filmer et frit fald for en fjerbold, kan man bestemme C_D for denne. Kræfterne på bolden vil være tyngdekraften og luftmodstanden.

⁴ Kan findes som v divideret med længden af v

Når fjerbolden har opnået en konstant hastighed, vil der gælde, at tyngdekraften og luftmodstanden er blevet lige store og modsatrettede. For størrelserne af kræfterne gælder altså

$$F_t = F_{\text{luft}} \Leftrightarrow m \cdot g = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot C_D \cdot v^2$$

Ud fra filmen bestemmes værdien for den konstante hastighed (husk at bolden skal falde et vist stykke vej, inden den konstante hastighed opnås). Nu måles fjerboldens masse m og tværsnitsareal A . Ud fra temperaturen kan luftens densitet bestemmes. Nu kan formfaktoren for fjerbolden bestemmes ud fra ligningen⁵.



Øvelse 6 Analyse af et badmintonslag.

For badminton vil et slag som overhåndsclear egne sig godt til analyse og modelberegninger ud fra bevægelsesligningerne. Sådant slag har en typisk starthastighed omkring 40 – 50 m/s for den øvede spiller.

Vi kan nu indsætte talværdier i de ligninger, vi udledte ovenfor:

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho \cdot A}{2m} \cdot C_D \cdot v^2 \cdot \cos(\psi) \\ -\frac{\rho \cdot A}{2m} \cdot C_D \cdot v^2 \cdot \sin(\psi) - g \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

Man kan som startværdier bruge $v = 50$ m/s, $A = 0,001$ m², $m = 0,005$ kg og $\rho = 1,20$ kg/m³ ved 20 °C.

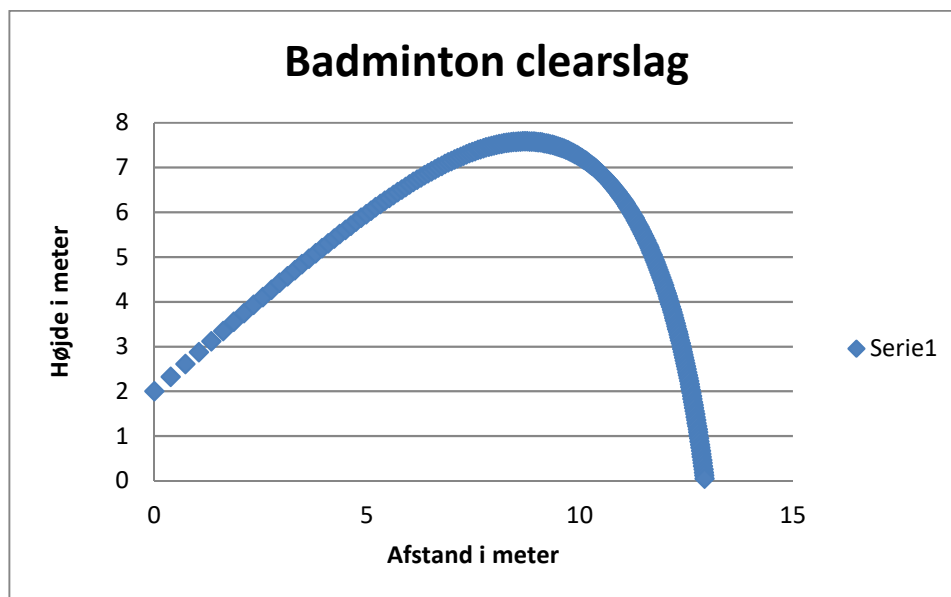
Hvis man har bestemt en værdi for formfaktoren, kan man bruge denne.

Ellers kan man prøve sig frem, man kan fx starte med værdien 0,50. Nogle studier⁶ har vist, at formfaktoren er mellem 0,5 og 0,6. I en spilsituation vil startvinklen afhænge af situationen, her er valgt en startvinkel på 40°.

Nedenfor er en numerisk løsning til ligningerne med de nævnte værdier. Excelfilen kan hentes **her**.

⁵ Værdien af formfaktoren vil afhænge af Reynoldstallet. Dette ser vi her bort fra.

⁶ <http://www.worldbadminton.com/reference/documents/ICME09-FM-17.pdf>



5.5 Det skrå kast med luftmodstand og skru

Ofte vil det være relevant at kigge på en situation med skru i bolden. Dette giver en kraft, der virker opad eller nedad på bolden alt efter, om der er under- eller overskru i bolden. Denne kraft kaldes magnuseffekten. Vi vil først og fremmest betragte tilfældet, hvor der er enten over- eller underskru og ikke noget skru til siden. Der gælder altså, at rotationsaksen er vandret. Gode eksempler på dette kunne være et golfslag eller et målspark i fodbold. Golfkøller er fx indrettet således, at de giver bolden underskru (bottom spin), så vil bolden nemlig flyve længere, end den ellers ville. Ofte vil man i et målspark i fodbold også give bolden underskru af samme grund. Et eksempel på en situation, hvor man vil give bolden overskru, kan være en serv i volleyball. Her vil overskruet betyde, at bolden vil dykke og altså ikke nå så langt, som den ville uden skru. Magnuseffekten giver en kraft, der er vinkelret på tangenten, dvs. den er rettet langs tværvektoren til \vec{e}_t . Vi indfører derfor en enhedsvektor i denne retning, som vi kalder \vec{e}_n . Der gælder altså, at

$$\vec{e}_n = \hat{e}_t = \begin{pmatrix} -\sin(\psi) \\ \cos(\psi) \end{pmatrix}.$$

Magnuseffekten kaldes også 'lift' på engelsk, og størrelsen af den er givet som

$$\vec{F}_{\text{lift}} = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot C_L \cdot v^2 \cdot \vec{e}_n,$$

hvor C_L er en dimensionsløs konstant, kaldet 'lift' koefficienten. Fortegnet foran afhænger af, om bolden har over- eller underskru. Her er valgt et plus, svarende til underskru, hvor magnuseffekten peger opad. Hvis vi sætter det hele sammen til en ligning bliver det

$$\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} - \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot C_D \cdot v^2 \cdot \vec{e}_t + \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot C_L \cdot v^2 \cdot \vec{e}_n$$

Vi får så

$$m \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} m \cdot \frac{dv_x}{dt} \\ m \cdot \frac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot C_D \cdot v^2 \cdot \cos(\psi) + \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot C_L \cdot v^2 \cdot (-\sin(\psi)) \\ \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot C_L \cdot v^2 \cdot \cos(\psi) - \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot C_D \cdot v^2 \cdot \sin(\psi) - m \cdot g \end{pmatrix}$$

Vi omskriver igen til to differentialligninger

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho \cdot A}{2m} \cdot v^2 \cdot (C_D \cdot \cos(\psi) + C_L \cdot \sin(\psi)) \\ -\frac{\rho \cdot A}{2m} \cdot v^2 \cdot (C_D \cdot \sin(\psi) - C_L \cdot \cos(\psi)) - g \end{pmatrix}$$

Opgave 35 Vis dette.

Desuden gælder som før

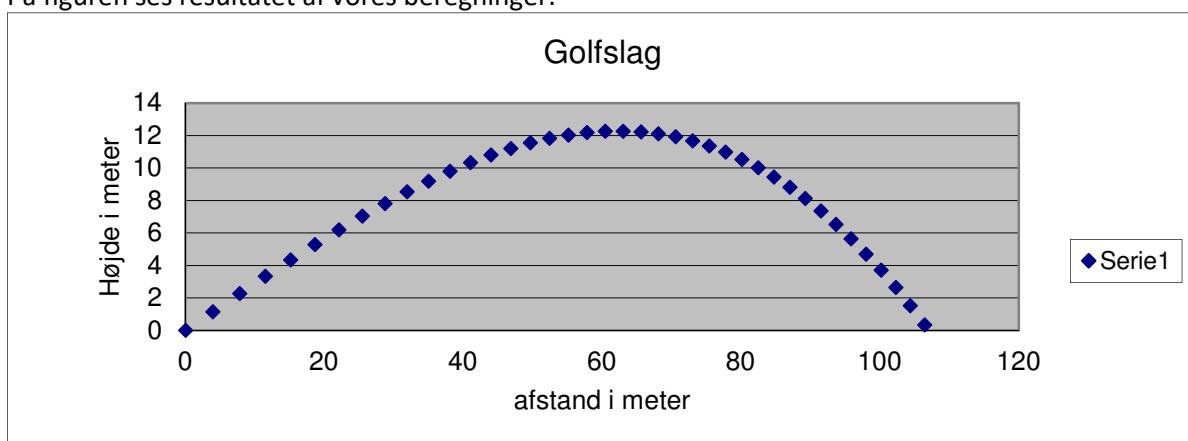
$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

Du kan finde en numerisk løsning til de ovenstående ligninger lavet med 4. ordens Runge-Kutta **her**.

Som startværdier er brugt $\alpha = 15,9^\circ$,

$v = 42 \text{ m/s}$, $A = 0,001425 \text{ m}^2$, $m = 0,046 \text{ kg}$ og $\rho = 1,28 \text{ kg/m}^3$. Værdierne af C_D og C_L vil afhænge af, hvor hurtigt bolden roterer samt boldens hastighed. Her er valgt $C_D = 0,3$ og $C_L = 0,25$, som er typiske værdier. Som tidsskridt er brugt $0,1 \text{ s}$.

Prøv nu selv at bruge dit værktøjsprogram, og gennemfør en numerisk løsning med 4. ordens Runge-Kutta. På figuren ses resultatet af vores beregninger.



5.6 Det skrå kast med luftmodstand og skru til siden

Når rotationsaksen ikke er vandret, vil man få en magnuseffekt, der også går til siden. Det er fx dette, der sker, når man kan score på hjørnespark i fodbold. For at betragte denne situation, må vi have vektorer i tre dimensioner. Vi lægger x -aksen ud i den originale retning af det skrå kast og y -aksen opad, ligesom vi gjorde før. Nu tilføjes z -aksen, der går til siden. Vores vektorer fra før \vec{e}_t og \vec{e}_n får nu en ekstra koordinat på. Til start er denne koordinat 0, hvis vi antager, at hastighedsvektoren til start kun har komponenter i x -aksens og y -aksens retning.

Kraften, der virker sidelæns \vec{F}_{side} har størrelsen

$$|\vec{F}_{side}| = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \cdot C_s$$

Her er C_s en dimensionsløs konstant, der afhænger af rotationshastigheden. Retningen af denne kraft vil gå til siden og vil afhænge af, hvilken vej bolden roterer. Hvis fx en golfbold har en rotation på 400 rad/s, vil C_s og C_L være ca. 0,2.

5.7 SRP

Emnerne i dettekapitel er særdeles velegnet til SRP opgaver. Først et eksempel på en opgave om motorløb, nærmere bestemt formel 1.

Opgaveformulering: Fysiske faktorer i Formel 1

Du skal beskrive udvalgte fysiske teorier, der er relevante i forbindelse med Formel 1 – racerløb. Du skal i forbindelse med en diskussion af hvilke kræfter, som virker på bilen, lave beregninger på kørsel i et sving. Du skal planlægge og udføre eksperimenter, som belyser dele af de fysiske teorier. Du skal analysere og vurdere dine resultater.

Du skal gennem udvalgte eksempler belyse, hvordan udviklingen af bilerne influerer på reglerne i Formel 1. Du kan inddrage vedlagte hjemmesider fra: Motersporten.dk 30/5 : Skærpelse omkring fleksvinge
Fag: Fysik A og Idræt B

Det skrå kast er også meget velegnet til SRP og kan bruges i mange sammenhænge. Man kan filme forskellige typer af skrå kast og analysere dem bagefter. Desuden kan man prøve at modellere bevægelsen, så man kan sammenligne bevægelse og model. På mange golf baner har de udstyr til at lave radarmålinger af de enkelte golfslag, hvor man får bestemt mange forskellige parametre og får kurverne ud direkte. Her er eksempler på opgaveformuleringer.

Opgaveformulering: Det skrå kast

Gør kort rede for teorien bag det skrå kast uden luftmodstand. Redegør for det skrå kast med luftmodstand ved at opstille de relevante differentialligninger.

Redegør for, hvordan man kan løse differentialligninger numerisk, kom herunder specielt ind på Runge-Kutta metoden.

Planlæg og udfør eksperimenter til undersøgelse af det skrå kast med og uden luftmodstand. Det kan fx være kast med en kuglestøds-kugle og et clearslag fra badminton. Løs de tilhørende differentialligninger numerisk.

Analysér og vurder dine eksperimentelle resultater, og sammenlign med de numeriske løsninger.

Fag: Matematik A og fysik A

Opgaveformulering: Golf

Gør kort rede for forskellige golfkøllers udformning og betydningen for brugen, den mest optimale måde at ramme en golfbold på samt en golfbolds opbygning.

Planlæg og udfør eksperimenter til belysning af forskellene på et udvalg af golfkøller. Undersøg herunder hvor meget energi, der overføres fra køllen til bolden.

Redegør for kræfterne på en golfbold efter skuddet. Opstil differentiallyigninger for golfboldens bevægelse efter skuddet. Bestem banekurven ved hjælp af Runge-Kutta metoden for mindst et udvalgt tilfælde.

Analysér og vurdér dine eksperimentelle resultater og sammenlign med teorien.

Fag: Matematik A og fysik A.

Opgaveformulering: Fodbold - optimering af spark

Du skal redegøre for relevante dele af den matematisk-fysiske teori, der hører til analyse af fodboldspark.

Du skal planlægge og udføre eksperimenter med forskellige fodboldspark. Du skal analysere og vurdere dine resultater i forhold til den bagvedliggende teori, og du skal undersøge hvilke faktorer, der spiller ind for optimering af sparkene i forhold til deres brug i en fodboldkamp.

Du skal analysere et lodret vristspark med henblik på en beskrivelse af de væsentligste indgående muskelgrupper og deres virkemåde.

Du skal kort gøre rede for, hvilke overvejelser som er relevante i forhold til tilrettelæggelsen af et træningsprogram for en fodboldspiller på eliteniveau.

Med udgangspunkt i straffesparksafgørelsen af Champions League-finalen 2013 mellem Bayern München og Chelsea (se evt. linket nedenfor) skal du diskutere, hvilke faktorer der er afgørende for optimering af et straffespark. (http://www.youtube.com/watch?v=CiIR_b-zYCo)

Fag: Matematik A, fysik B og idræt B.

Kapitel 8. Anden ordens differentialligninger

(Teorien for løsning af anden ordens differentialligninger er behandlet i HEM A, kapitel 8, og i HEM 3, kapitel 6. Kapitlerne er identiske)

8.1 Matematisk pendul

Et lod med massen m hænger i en snor med længde l . Loddet svinger frem og tilbage. Udsvinget betegnes x og regnes positivt mod højre.

Vi vil kun se på små udsving, hvor det vandrette udsving kan sættes lig med buelængden. Heraf har vi

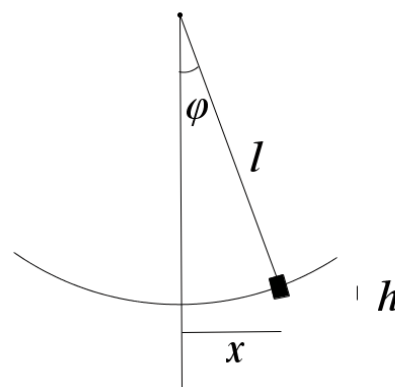
$$x = l \cdot \phi,$$

hvor ϕ er vinklen målt ved ophængspunktet.

Snorens længde er konstant, så vi har følgende:

$$v = x' = l \cdot \phi' \text{ og } a = v' = l \cdot \phi'',$$

hvor v og a betegner henholdsvis fart og acceleration.



Højden som loddet er løftet over det laveste punkt betegnes h . Højden kan også udtrykkes som

$$h = l - l \cdot \cos(\phi) = l \cdot (1 - \cos(\phi)).$$

Hvis vi antager, at man kan se bort fra luftmodstanden, er den mekaniske energi bevaret, og vi har

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{konstant}.$$

Vi differentierer med hensyn til tiden:

$$\frac{1}{2}m \cdot 2v \cdot v' + mgh' = 0$$

$$mv a + mg \frac{d}{dt}(l(1 - \cos(\phi))) = 0$$

$$mv a + mg \cdot l \sin(\phi) \phi' = 0$$

$$l \cdot \phi' \cdot a + g \cdot l \cdot \sin(\phi) \cdot \phi' = 0$$

$$l \cdot x'' + g \cdot x = 0$$

$$x'' = -\frac{g}{l} \cdot x$$

Opgave 6 Argumenter omhyggeligt for her enkelt af de omskrivninger, der er foretaget her.

Sætning 2 i HEM 3, kapitel 6 giver løsningen til den ovenstående differentialligning, der bliver:

$$x(t) = c_1 \cdot \sin(kt) + c_2 \cdot \cos(kt),$$

hvor c_1 og c_2 er konstanter, og $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Ifølge praxisboks i samme afsnit 3.2, kan løsningen også skrives som

$$x(t) = A \cdot \sin(kt + \phi_0),$$

hvor amplituden $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ og faseforskydningen ϕ_0 er to nye integrationskonstanter.

Svingningstiden af loddet findes ved brug af ligningen

$$T = \frac{2\pi}{k} \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

(se fx afsnit 2.5 om *Harmoniske svingninger* i HEM 3, kapitel 1.)

Øvelse 7 FORSLAG TIL PRAKTISKE ØVELSER

f) Eksperimentel verifikation af formlen for svingningstiden

Det matematiske pendul opererer med en punktformig masse, så I skal vælge et lod med meget lille udstrækning til forsøget. Forsøget går ud på at måle svingningstiden som funktion af snorens længde, så det bedste er at have en krog i loftet og starte med en relativt lang snor (fx $l=1,5\text{ m}$).

Mål svingningstiden, afkort snoren og mål igen. I alt samler I 5-10 sammenhørende værdier af T og l .

Praktiske overvejelser: Formlen er kun gyldig for små vinkler, så hold det maksimale udsving under 20° . Snorens længde måles fra ophængspunktet til massemidtpunktet af loddet. Overvej selv, hvordan I bedst muligt måler svingningstiden.

Databehandling: Plot svingningstiden som funktion af længden og lav potensregression på jeres datapunkter. Kontroller, at kurven med god tilnærmelse går gennem punkterne. Derudover skal konstanterne være $a=1/2$ og $b=2\pi/\sqrt{g}$.

g) Hvornår er en vinkel lille?

For en fast snorlængde måler I svingningstiden for voksende vinkel for det maksimale udsving. Start med 5° og brug så større og større vinkler, indtil I ser en signifikant afvigelse.

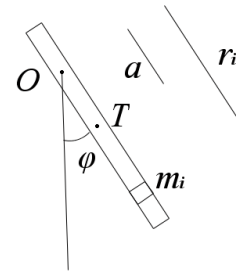
8.2 Fysisk pendul

Det matematiske pendul er en abstraktion, hvor man regner med, at al massen er placeret i et enkelt punkt. Hænger man et ikke alt for stort lod i en snor, hvor længden af snoren er meget større end udstrækningen af loddet, er det en meget god model.

Hvis legemets udstrækning ikke kan negligeres, kan man stadig beskrive bevægelsen, og metoden fra før kan bruges igen med et par små ændringer.

En stang med samlet længde l svinger om ophængspunktet O . T er stangens tyngdepunkt, se evt. kapitel 3.

Nulpunktet for den potentielle energi placeres i stangens nederste punkt i ligevægtsstillingen. Den samlede energi kan skrives som:



$$\begin{aligned} E &= \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 + m_i g (-r_i \cos(\phi)) \right) \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 + \sum_i -m_i g r_i \cos(\phi) \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2 - g \cos(\phi) \sum_i m_i r_i \end{aligned}$$

Den første sum kan genkendes som stangens inertimoment I , og den anden sum ses at være lig med $m \cdot a$, hvor m er stangens samlede masse (se afsnit 3.2 i kapitlet om integralregning). Undervejs har vi indført vinkelfrekvensen, der er givet ved $\omega = \phi'$.

Altså:

$$E = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 - m \cdot g \cdot a \cdot \cos(\phi).$$

Ved differentiation får man:

$$\frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \omega' - m \cdot g \cdot a \cdot (-\sin(\phi)) \cdot \phi' = 0$$

Udnytter vi, at $\omega = \phi'$ og dermed at $\omega' = \phi''$ får man

$$I \cdot \phi'' + m \cdot g \cdot a \cdot \sin(\phi) = 0.$$

Vi vil igen udnytte, at ved små vinkler er $\sin(\phi) \approx \phi$, samt at $x = l \cdot \sin(\phi) \approx l \cdot \phi$

$$I \cdot \phi'' + m \cdot g \cdot a \cdot \phi = 0$$

$$I \cdot l \cdot \phi'' + m \cdot g \cdot a \cdot l \cdot \phi = 0$$

$$I \cdot x'' + m \cdot g \cdot a \cdot x = 0$$

$$x'' = -\frac{mga}{I} \cdot x$$

Ovenstående ligning er af samme form som differentialligningen for det matematiske pendul, og løsningen kan igen skrives som $x(t) = A \cdot \sin(kt + \phi_0)$, hvor k denne gang er givet ved $k = \sqrt{\frac{mga}{I}}$. Svingningstiden for det fysiske pendul er

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{mga}}.$$

Øvelse 8 FORSLAG TIL PRAKTISKE ØVELSER

A. Homogen stang

En homogen stang (fx et kosteskæft) med huller boret med jævne mellemrum hænges op, så den kan svinge frit. Beregn Inertimomentet og mål svingningstid og afstand mellem ophæng og massemidtpunkt.

Overvej selv hvordan I bedst dokumenterer, at I har eftervist ovenstående formel for svingningstiden.

B. Pendul fra standerur

I mangel af et rigtigt pendul fra et standerur, kan kosteskæftet fra forrige forsøg bruges, hvis man hæfter et passende tungt lod i enden af det.

Pendulerne har en lille skrue i enden til at justere svingningstiden, hvis uret går for langsomt eller for hurtigt.

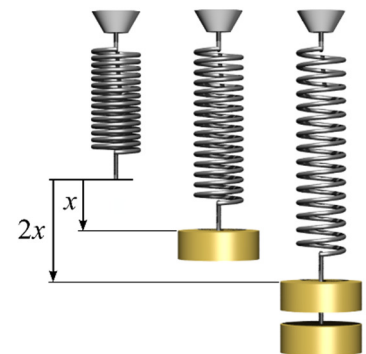
Vis eksperimentelt at svingningstiden kan ændres ved at flytte loddet en lille smule op og ned. Beregn l og a og kontroller, at der er overensstemmelse med eksperimentet.

8.3 Harmonisk svingning – fjeder

Vi vil her undersøge, hvordan en klods med massen m bevæger sig, når den er fastgjort for enden af en fjeder. Kraften fra en fjeder er givet ved Hookes lov, der siger, at

$$F_{\text{fjeder}} = -k \cdot x,$$

hvor k er fjederkonstanten og x er forlængelsen af fjederen. Først ser vi på bevægelsen, hvor fjederkraften er den eneste kraft og bagefter, hvad der sker, hvis vi medregner tyngdekraften.



Vandret svingende fjeder.

Fjederen og loddet placeres på et vandret, gnidningsfrit underlag. Da tyngdekraften på loddet modsvares af normalkraften fra underlaget, kan vi regne med, at fjederkraften er den eneste kraft på loddet. Newtons 2. lov giver så

$$F_{\text{res}} = F_{\text{fjeder}}$$

$$m \cdot a = -k \cdot x$$

$$m \cdot x'' = -k \cdot x$$

$$x'' = -\frac{k}{m} \cdot x$$

Som tidligere får man en harmonisk svingning med svingningstid $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Lodret svingende fjeder.

Hvis fjeder og lod i stedet hænges lodret, skal tyngdekraften F_{tyngde} også medregnes. Newtons 2. lov giver nu

$$F_{\text{res}} = F_{\text{fjeder}} + F_{\text{tyngde}}$$
$$m \cdot a = -k \cdot x + m \cdot g$$

Lader vi først loddet hænge i ligevægtsstillingen i hvile, har vi $a=0 \text{ m/s}^2$ og dermed, at $k \cdot x_0 = m \cdot g$. x_0 er udstrækningen af fjederen i ligevægt.

Loddet sættes nu i svingninger. Ovenstående ligning giver

$$m \cdot a = -k \cdot x + k \cdot x_0$$
$$m \cdot x'' = -k \cdot (x - x_0)$$

Vi indfører nu en ny variabel $y = x - x_0$, der beskriver forlængelsen af fjederen *ud fra ligevægtsstillingen*. Det ses at $y' = x'$ og $y'' = x''$. Indsættes det i ligningen har vi:

$$m \cdot y'' = -k \cdot y$$

Altså igen en harmonisk svingning ud fra ligevægtsstillingen og med samme svingningstid som før.

Øvelse 9 FORSLAG TIL PRAKTISKE ØVELSER

A. Måling af svingningstiden.

I denne opgave skal I selv være med til at definere det problem, der skal undersøges, samt hvordan det skal gøres.

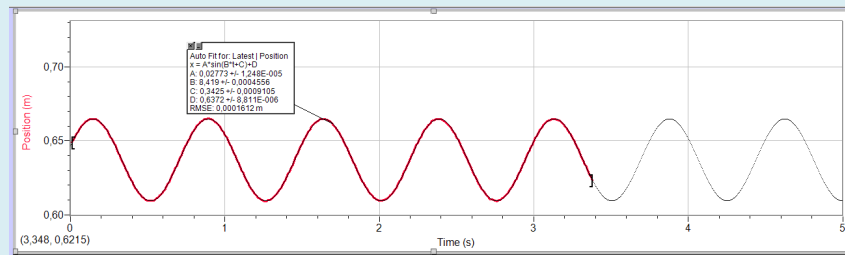
Når et lod hænger i fjederen, og svingningen sættes i gang, kan man eksperimentelt bestemme svingningstiden. Så langt så godt, men herfra er der utallige veje at gå.

- Brug resultatet til at bestemme fjederkonstanten, og sammenlign med en direkte bestemmelse af k .
- Undersøg svingningstidens afhængighed af m og/eller k .
- Har du selv en eller flere gode ideer til hvordan man kan lave videre undersøgelser?

B. Eksperimentel bestemmelse af $x(t)$.

En bestemmelse af stedfunktionen for loddet kan gøres på to måder. Første mulighed er at filme bevægelsen og så bruge Tracker, LoggerPro eller lignende programmer til at opnå en række sammenhørende værdier af x og t . Alternativt benyttes dataopsamling med en afstandsmåler til at opnå det samme resultat.

- Fit en harmonisk funktion $x(t) = A \cdot \sin(B \cdot t + C) + D$ til datasættet.
- Hvordan skal konstanterne A , B , C og D fortolkes?
- Kan nogle af værdierne kontrolleres vha. ekstra målinger?



Målte data (rødt) og fit med en harmonisk svingning (sort) i LoggerPro.

8.4 Dæmpet svingning

Den svingning, vi har arbejdet med indtil nu, kan i princippet fortsætte uendeligt. Sådan er den virkelige verden ikke indrettet, og man vil se, at svingningen efter et stykke tid vil dø ud på grund af gnidningsmodstand. Denne kan være *turbulent* eller *laminar* alt efter det såkaldte Reynoldstal, der er givet ved

$$R_e = \frac{v \cdot l \cdot \rho}{\eta},$$

hvor v er hastigheden af loddet, l er udstrækningen af loddet og ρ og η er hhv. densiteten og viskositeten af det materiale, loddet bevæger sig i (i dette tilfælde atmosfærisk luft).

Her vil vi kun se på en laminar strømning svarende til et lavt Reynoldstal (helst under 1). Dette opnås fx ved at binde en lille metalkugle fast til fjederen og så lade kuglen bevæge sig i et glas fyldt med sæbe eller sirup.

Her er en tabel med typiske værdier af densitet og viskositet for de nævnte væsker:

	Densitet ρ (kg/m ³)	Viskositet η (Pa·s)
Flydende sæbe	800 - 1000	1 - 5
Sirup	1380	2 - 10

Gnidningskraften er i dette tilfælde givet ved

$$F_{\text{gnid}} = -6\pi\eta r v = -b \cdot v,$$

hvor r er kuglens radius og $b = 6\pi\eta r$ er en konstant. Newtons 2. lov giver nu

$$F_{\text{res}} = F_{\text{fjeder}} + F_{\text{tyngde}} + F_{\text{gnid}}$$

$$m \cdot a = -k \cdot x + m \cdot g - b \cdot v$$

$$m \cdot x'' = -k \cdot x + m \cdot g - b \cdot x'$$

Hvis vi ligesom før indfører udsvinget fra ligevægtsstillingen $y = x - x_0$ har vi

$$m \cdot y'' = -k \cdot y - b \cdot y'$$

$$m \cdot y'' + b \cdot y' + k \cdot y = 0$$

Ifølge sætning 3 i HEM A, kapitel 8 (eller: HEM 3, kapitel 6) bliver løsningen med den sædvanlige omskrivning

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_0) \cdot e^{-\frac{b}{2m}t},$$

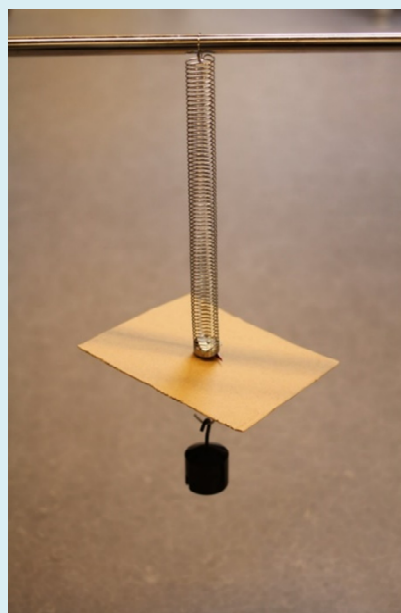
hvor $\omega = \frac{\sqrt{4km - b^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ er svingningens vinkelfrekvens. Bemærk, at gnidningsmodstanden altså også ændrer svingningens frekvens eller periode.

Øvelse 10 FORSLAG TIL PRAKTISKE ØVELSER

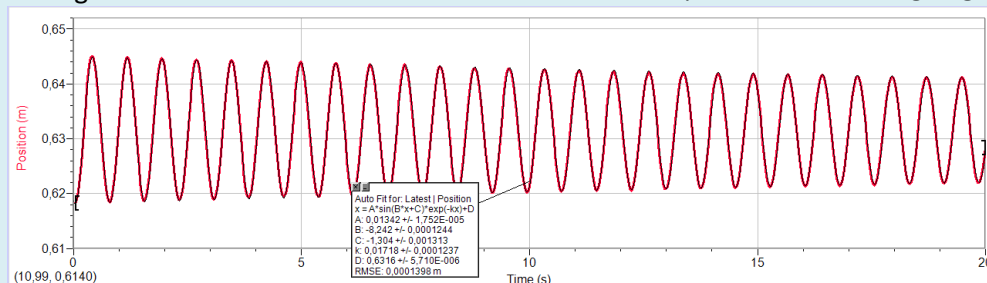
Placer en lille metalkugle ophængt i en fjeder i et cylinderformet glas med klar, flydende sæbe som vist på figuren nedenfor. Glasset skal være bredt nok til, at kuglen kan bevæge sig frit, men smalt nok til at man uden problemer kan se kuglen, når man filmer bevægelsen.

Databehandlingen er stort set som før, idet man selvfølgelig nu skal fitte til en anden funktion.

Alternativ: Brug en papskive og lad den bevæge sig i alm. luft. Reynoldstallet bliver lidt for stort til, at det er ideelt, men som man kan se på nedenstående graf, passer det alligevel nogenlunde.



Dæmpet harmonisk svingning

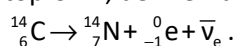


Dæmpet svingning optaget med LoggerPro

8.5 Radioaktive henfald – henfaldskæde

Henfald til en stabil isotop.

En meget stor andel af alle kendte atomkerner er ustabile, og kernen vil på et tidspunkt omdannes til en anden kerne under udsendelse af stråling. For eksempel er en del af det kulstof, som vi alle er opbygget af, den ustabile isotop C-14, der henfalder under udsendelse af betastråling (elektroner) på følgende måde



C-14 dannes naturligt i atmosfæren og optages sammen med de stabile kulstofisotoper i alt levende. Når en organisme dør, optages der ikke mere, og mængden af den radioaktive isotop aftager med tiden. Dette benyttes til at datere en mængde arkæologiske fund.

Det er umuligt at forudsige, hvornår en bestemt kerne henfalder. Kvantemekanikken, der succesfuldt beskriver alle atomare fænomener, giver kun en sandsynlighed for, at kernen henfalder i et givet tidsinterval. Ofte har man ikke kun én men derimod mange kerner, og så er det en eksperimentel kendsgerning, at antallet af henfald er proportional med antallet af kerner N og med tidsintervallet Δt . Da antallet af kerner er aftagende, vil antallet af henfald være $-\Delta N$.

Altså

$$-\Delta N = k \cdot N \cdot \Delta t,$$

hvor proportionalitetskonstanten k også betegnes henfaldskonstanten. Her er k sandsynligheden pr. tidsenhed for at en kerne henfalder. Ligningen omskrives, og vi lader Δt gå mod nul

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -k \cdot N$$

$$\frac{dN}{dt} = -k \cdot N.$$

Sætning 1 i HEM 3, kapitel 3A, afsnit 3 fortæller, at løsningen til denne differentiaalligning er

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt},$$

hvor N_0 er antallet af kerner til tiden $t=0$.

Opgave 36 Vis ved hjælp af sætningen, at ovenstående påstand er korrekt.

Opgave 37 En lille prøve udtages fra et stykke gammelt træ. Den pågældende mængde træ ville indeholde 3.4 μg C-14, hvis prøven var fra helt friskt træ, men nu finder man kun 2,5 μg .

Find halveringstiden for C-14, og bestem alderen af træet.

Opgave 38 Udfør terningeksperimentet beskrevet i HEM 2, kapitel 11, matematik-fysik, .afsnit 8.3.A "Terningekast og tilfældighed" i

Henfaldskæde

Meget ofte henfalder det givne stofs atomer til kerner, der heller ikke er stabile. Eksempelvis skal uranisotopen ${}_{92}^{238}\text{U}$ igennem ikke mindre end 14 henfald, før man ender med den stabile blyisotop ${}_{82}^{206}\text{Pb}$ ⁷. Her vil vi simplificere det lidt og kun se på de to første isotoper i kæden og ikke bekymre os om stabiliteten af resten. Den oprindelige isotop kaldes moderkerner og antallet betegnes med M . De næste i rækken kaldes alle for

⁷ Hele henfaldskæden er gengivet i *Hvad er matematik? 3*, kapitel 3A, afsnit 1

datterkerner. Her vil vi reservere navnet til nr. to i rækken og betegne antallet af dem D . Henfaldskonstanterne for de to isotoper betegnes hhv. k_M og k_D . Man kan opstille følgende differentialligninger, der beskriver antallet af de to kerner

$$\frac{dM}{dt} = -k_M \cdot M$$

$$\frac{dD}{dt} = -k_D \cdot D + k_M \cdot M$$

Generelt er sådan et sæt koblede differentialligninger umulige at løse analytisk, men her er vi heldige. Den første ligning indeholder kun den ene funktion og løsningen er som før

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-k_M t}$$

Udtrykket for $M(t)$ indsættes i den anden ligning

$$\frac{dD}{dt} = -k_D \cdot D + k_M \cdot M_0 \cdot e^{-k_M t}$$

Sætning 4 i HEM 3, kapitel 3A, afsnit 3 kan med fordel benyttes til at løse ovenstående ligning. Med begyndelsesbetingelsen $D(0) = 0$ får man:

$$D(t) = \frac{k_M}{k_D - k_M} \cdot M_0 \cdot (e^{-k_M t} - e^{-k_D t}) \quad \text{for } k_M \neq k_D$$

$$D(t) = k \cdot M_0 \cdot t \cdot e^{-k t} \quad \text{for } k_M = k_D = k$$

Opgave 39 Eftersis løsningen dels med et CAS-værktøj og dels ved at bruge den nævnte sætning.

Opgave 40 Betragt en henfaldskæde, hvor startmængden af moderkernerne er 1000 mg, og hvor henfaldskonstanten er givet ved $k_M = 1/12 \text{ s}^{-1}$.

- Tegn grafen for $N(t)$.
- Tegn i samme koordinatsystem grafen for $D(t)$, når henfaldskonstanten for datterkernerne k_D antager værdierne $1/6 \text{ s}^{-1}$, $1/12 \text{ s}^{-1}$ og $1/24 \text{ s}^{-1}$.
- Kommentér graferne.

Opgave 41 Udfør et eksperiment med terningekast til at simulere radioaktive henfald i stil med hvad I gjorde i øvelse 8.xx. Moderkernerne henfalder hvis man slår en femmer eller en sekser (dvs. k_M er $1/3$), og datterkernerne henfalder, hvis man slår en ener (dvs. k_D er $1/6$).

- Kast først moderterningerne og registrer antallet af henfald. De henfaldne terninger flyttes til en datterkernebunke. I første runde er der ingen henfald af datterkernerne.

- b) Moderkerner og datterkerner kastes nu samtidigt (men husk at holde dem adskilte!). De henfaldne moderkerner flyttes til datterkernepunkten mens de henfaldne datterkerner fjernes. Dette gentages et passende antal runder.
- c) Plot antallet af moder- og datterkerner i et koordinatsystem. Kommentér.
- d) Hvordan skal man sammenligne disse resultater med de teoretisk forventede værdier? Overvej en mulig metode og udfør det i praksis.

Lad os vende tilbage til de oprindelige differentialligninger

$$\frac{dM}{dt} = -k_M \cdot M$$

$$\frac{dD}{dt} = -k_D \cdot D + k_M \cdot M$$

Hvis moderkernerne har en halveringstid, der er meget større end datterkernerne (dvs. hvis $k_M \ll k_D$) vil M være næsten konstant og antallet af datterkerner vil vokse op til et konstant niveau, hvor der er ligevægt:

$$D' = 0 \Leftrightarrow D = \frac{k_M}{k_D} \cdot M.$$

Forholdet mellem moder- og datterkerner er altså bestemt af forholdet mellem henfaldssandsynlighederne.

Opgave 42

- a) Et eksempel på dette er det tidligere nævnte henfald af ${}^{238}_{92}\text{U}$. Bestem mængden af ${}^{234}_{90}\text{Th}$, hvis man har 50 g uran, og prøven er gammel nok til, at der er opnået ligevægt.
- b) Hvordan vil det forholde sig med alle de andre stoffer i henfaldskæden?

8.6 Det bærende kabel for en hængebro

Som et centralt eksempel på differentialligningen $y'' = k^2 \cdot y$ er i HEM 3, kapitel 6, afsnit 3.1 beskrevet kædelinjen, der er den matematiske beskrivelse af et kabel ophængt frit mellem to ophængningspunkter. Hvis der imod en brobane er hængt op i det bærende kabel, så er situationen anderledes. Vi antager, at kablets vægt er ubetydelig i forhold til brobanens vægt samt, at brobanen har samme tykkelse hele vejen og er konstrueret af et ensartet materiale således, at vægten af et stykke af brobanen er proportional med længden af stykket. Vi betragter kablet og brobanerne som ét stift system.

Kablet er lagt ind i et koordinatsystem, hvor 1. akse fx følger vandoverfladen, og 2. akse peger opad og følger broens symmetriakse. Kablet kan således betragtes som graf for en funktion $f(x)$. Grafen / Kablet består af små (infinitesimale) kabelstykker. Vi betragter et af disse, stykket fra $(x_0, f(x_0))$ til $(x, f(x))$. Dette kabelstykke er bundet sammen med brobanen mellem x_0 og x til ét system, og vi vil nu se på hvilke kræfter, der virker på dette lille system.

Tyngdekraften er proportional med massen af det legeme, tyngdekraften virker på, dvs. i dette tilfælde er tyngdekraften altså proportional med vægten af brobanen. Da brobanens vægt er proportional med dens længde, er tyngdekraften altså proportional med længden af det stykke af brobanen, vi betragter. Længden af dette er $x - x_0$.

Kaldes tyngdekraften på stykket fra x til x_0 for F_T , må der derfor findes en konstant k , så:

$$F_T = k \cdot (x - x_0)$$

Den næste kraft, vi betragter, er trækket fra kablet i hver ende af stykket. Den kraft, der trækkes med, kaldes *snorkraften*. Snorkraften har samme retning som tangenten til den kurve, kablet danner. Lad os først se på snorkraften S_H på det højre punkt $(x, f(x))$. Tangentens hældning i punktet $(x, f(x))$ er $f'(x)$. Snorkraftens retning kan vi angive ved at tegne en retvinklet trekant med 1 ud af x -aksen, og $f'(x)$ lodret op af y -aksen. Trekantens hypotenuse forlænges, så stykket svarer til snorkraftens størrelse, S_H . Vi tegner nu den retvinklede trekant, der har snorkraften som hypotenuse, hvilket svarer til at opløse snorkraften i en vandret del, $S_{H,v}$, og en lodret del $S_{H,l}$. Hvis kræfterne er repræsenteret som vektorer, gælder der altså:

$$\vec{S}_H = \vec{S}_{H,v} + \vec{S}_{H,l}$$

Vi ser på længderne, så vi regner numerisk:

De to trekanter er ensvinklede. Derfor gælder:

$$\frac{S_{H,l}}{S_{H,v}} = \frac{f'(x)}{1}, \quad \text{eller:}$$

$$S_{H,l} = S_{H,v} \cdot f'(x)$$

Ved på samme måde at betragte den snorkraft, der virker i den anden ende af det lille kabelstykke, får vi:

$$S_{V,l} = S_{V,v} \cdot f'(x_0)$$

Den samlede vandrette kraft, der virker på det lille udsnit af broen, fås ved sammensætning af $S_{H,v}$ og $S_{V,v}$. Da broen hænger stille må disse to gensidigt ophæve hinanden. Dvs. de er numerisk lige store:

$$S_{H,v} = S_{V,v}$$

Den vandrette del af snorkraften må altså overalt være af samme størrelse. For var der et sted, hvor den ændrede størrelse, ville vi på dette sted ikke have den situation, vi behandlede ovenfor, nemlig at de vandrette dele af snorkræfterne er lige store og modsat rettede. Men argumentet gjaldt jo i ethvert punkt. Derfor må de vandrette dele overalt være numerisk lige store.

Denne størrelse kan vi derfor betegne med en konstant S .

Indsættes S i formlerne fra før, får vi:

$$S_{H,l} = S \cdot f'(x)$$

$$S_{V,l} = S \cdot f'(x_0)$$

På den del af broen, vi betragter, peger S_H opad, dvs. $S_{H,l}$ er positiv. S_V peger nedad, dvs. $S_{V,l}$ er negativ.

Havde vi betragtet den venstre halvdel af broen, havde det været omvendt.

Den samlede kraft på dette brostykke er sammensat af tyngdekraften F_T og de to lodrette bidrag fra kræfterne S_H og S_V .

F_T peger nedad ligesom $S_{V,l}$. Da broen hænger stille, må disse to tilsammen være lig den kraft, der virker opad:

$$F_T + S_{V,I} = S_{H,I}$$

Indsæt heri formlerne ovenfor samt formlen for tyngdekraften F_T :

$$k \cdot (x - x_0) + S \cdot f'(x_0) = S \cdot f'(x)$$

Nu omskriver vi lidt på det sidste udtryk:

$$k \cdot (x - x_0) + S \cdot f'(x_0) = S \cdot f'(x)$$

$$k \cdot (x - x_0) = S \cdot f'(x) - S \cdot f'(x_0)$$

$$k \cdot (x - x_0) = S \cdot (f'(x) - f'(x_0))$$

$$k = S \cdot \frac{(f'(x) - f'(x_0))}{(x - x_0)}$$

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{k}{S}$$

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = a$$

Saml leddene med f' på højre side:

Sæt S uden for parentes:

Divider med $(x - x_0)$:

Divider med S, og roker rundt

Indfør betegnelsen: $a = \frac{k}{S}$

Hvis vi for et øjeblik kalder f' for g , så kan det sidste udtryk skrives:

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = a$$

Dette genkender vi som differenskvotienten, vi opskriver, når vi undersøger, om en funktion $g(x)$ er differentiabel i x_0 . Hvis brøken har en grænseværdi, for $x \rightarrow x_0$, er $g(x)$ differentiabel i x_0 .

Men brøken er jo konstant, så den flytter sig ikke, men vedbliver at være a under grænseovergangen. Med andre ord:

$g(x)$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotienten $g'(x_0) = a$.

Dette gælder for et vilkårligt x_0 . Så $g'(x) = a$ for alle x

Opgave 43 Bestem nu $g(x)$ som en løsning til differentialligningen:

$$g'(x) = a,$$

idet du først opskriver den fuldstændige løsning.

Hvilken begyndelsesbetingelse kan vi anvende for at finde den søgte partikulære løsning?

(Hint: Tænk på at du selv bestemmer, hvor koordinatsystemet er placeret, og at dit valg giver dig en bestemt værdi af $g(x)$ - husk nemlig, at $g(x) = f'(x)$)

Opgave 44 Nu har vi et udtryk for $g(x)$. Indsæt nu den fundne $f'(x)$ i stedet for $g(x)$, så har du en ny differentialligning på formen:

$$f'(x) = \text{lineært udtryk i } x$$

Løs denne differentiaalligning ved at bestemme $f(x)$ som en stamfunktion til højre side.

Opskriv først den fuldstændige løsning.

Hvilken begyndelsesbetingelse kan vi anvende for at finde den søgte partikulære løsning?

(Hint: Tænk på at du selv har bestemt, hvor koordinatsystemet er placeret, og at dit valg giver dig en bestemt værdi af $f(x)$).

Du skulle nu være nået frem til, at

$$f(x) = \text{andengradspolynomium i } x$$

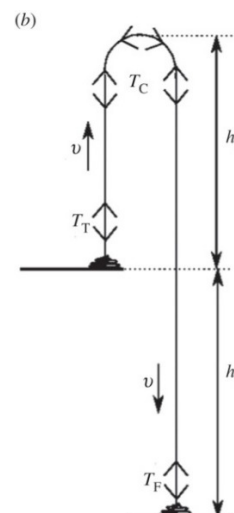
Grafen for $f(x)$ er den kurve, som det bærende kabel tegner. Dermed har vi set, at denne kurve er graf for et 2. grads-polynomium, altså at kurven er en parabel.

Øvelse 11 Lav et eksperiment, hvor du hænger et kabel op alene og et kabel med en brobane under.

Tag et billede af begge dele og undersøg, om de to grafer ser ud som forventet, dvs at den første følger en coshx-funktion og den anden en parabel.

8.7 Kædespringvand

Kædespringvandet optræder, når en kæde, der består af små metalperler, 'falder' ud over kanten af en beholder. Man kan fx se det her <https://www.youtube.com/watch?v=dQJBBkIpQQ>. På engelsk kaldes fænomenet 'chain fountain'. Hvis vi skal forklare fænomenet fysisk⁸, ser vi på situationen, hvor kæden trækkes op ad beholderen med en hastighed, som vi kalder v . Kæden må falde ned med samme hastighed, da den ellers ville gå i stykker eller samles et sted. Vi antager desuden, at denne hastighed er konstant. Vi antager, at kæden bevæger sig lodret opad, derefter skifter den retning i et område, der kan beskrives ved en jævn cirkelbevægelse, for så at bevæge sig lodret nedad. Kædens masse pr. længde kaldes λ . Beholderens højde over gulvet kaldes h_1 , og kædens højde over beholderen kaldes h_2 . Kæden ligger i en bunke både i beholderen og på gulvet. T_T er spændingen i kæden lige over bunken i beholderen, T_C er spændingen i kæden i den buede del af banen, og T_F er spændingen i kæden i den buede del af banen, og T_F er spændingen i kæden i den buede del af banen.



⁸ Der har været megen debat om den rigtige fysiske forklaring på dette fænomen. I denne fremstilling bruger vi en forklaring, der ligger op ad forklaringen fra <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/470/2163/20130689>

I området, hvor kæden skifter retning, antager vi, at centripetalaccelerationen

$\frac{v^2}{r}$ er meget større end tyngdeaccelerationen, således at vi kan se bort fra denne i dette område.

I cirkelbevægelsen må der gælde, at centripetalkraften pr. længde er givet ved

$$\frac{T_C}{r} = \lambda \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Der gælder derfor at

$$T_C = \lambda v^2.$$

Vi har altså, at kraften i kæden, spændingen, *ikke* afhænger af krumningen af cirkelbevægelsen, hvilket er bemærkelsesværdigt.

Da hastigheden, som tidligere nævnt, er konstant, må den samlede kraft på de enkelte stykker være lig nul. Først ser vi på stykket over beholderen og op til den krumme del af kurven. Her må der så gælde at

$$T_C = T_T + \lambda h_2 g,$$

hvor λh_2 er massen af det stykke af kæden. Tilsvarende har man for stykket fra den krumme del til gulvet

$$T_C = T_F + \lambda(h_1 + h_2)g$$

I et kort tidsinterval dt vil et lille stykke af kæden $dm = \lambda v dt$ blive løftet op og derved få impulsen $v \cdot dm = \lambda v^2 dt$. Dette skal samtidig være lidt kraftens impuls dvs. $T_T \cdot dt$. Vi får altså

$$T_T = \lambda v^2.$$

Kombineres dette med formlerne fra før

$$T_C = T_T + \lambda h_2 g \text{ og } T_C = \lambda v^2$$

ses det, at $h_2 = 0$! Det er jo i direkte modstrid med, hvad vi observerer, så der må være noget galt med forklaringen.

Vi prøver derfor at se på kæden som bestående af led af små stave, der er stive legemer. Hver gang et led skal op i luften, vil det enkelte led dreje sig. Leddet kan dog ikke bare dreje sig – bordet er jo i vejen – så det må altså blive påvirket med en ekstra kraft. Den kraft gør, at leddet hæver sig lidt op, mens det drejer. Vi har altså en ekstra kraft fra bordet, der virker opad på de enkelte led. Vi indfører derfor en reaktionskraft fra bordet på kæden, som vi kalder R . Der gælder så ikke længere, at $T_T = \lambda v^2$, men derimod

$$T_T + R = \lambda v^2.$$

Vi antager, at

$$R = \alpha \lambda v^2$$

Dette passer også med enhederne. Tilsvarende vil T_F også være mindre end før, da der er en kraft fra gulvet, der sænker hastigheden, som kæden rammer gulvet med, og vi antager at

$$T_F = \beta \lambda v^2.$$

Fra før har vi

$$T_C = T_T + \lambda h_2 g$$

$$T_C = T_F + \lambda(h_1 + h_2)g$$

$$T_C = \lambda v^2$$

Først omformes de to første ligninger til

$$\lambda h_2 g = T_C - T_T$$

$$\lambda h_1 g = T_C - T_F - \lambda h_2 g$$

Vi beregner forholdet mellem disse to ligninger

$$\frac{\lambda h_2 g}{\lambda h_1 g} = \frac{T_C - T_T}{T_C - T_F - \lambda h_2 g}$$

Udtrykket forkortes og $\lambda h_2 g$ udskiftes

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{T_C - T_T}{T_C - T_F - (T_C - T_T)} = \frac{T_C - T_T}{T_T - T_F}$$

Hvis man bruger $T_C = \lambda v^2$, $T_F = \beta \lambda v^2$ og

$$T_T + R = \lambda v^2 \quad \text{og} \quad R = \alpha \lambda v^2$$

kommer man frem til

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \Leftrightarrow h_1 = \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \cdot h_2$$

Vi har altså, at de to højder er proportionale.

Sætter vi de to udtryk for T_C lig hinanden, får vi

$$T_T + \lambda h_2 g = T_F + \lambda (h_1 + h_2) g .$$

Hvis man bruger de samme formler igen, får man efter lidt omskrivning

$$v^2 = \frac{h_1 g}{1 - \alpha - \beta} .$$

Hastigheden, som kæden falder med, afhænger altså af højden af beholderen over gulvet, samt to konstanter, der har med kædetypen at gøre. Man kan se en gennemgang af de fysiske argumenter, samt en diskussion af kædetyper på https://www.youtube.com/watch?v=-eEi7fO0_O0.

Øvelse 12

Lav selv et kædespringvand og film dette. Man kan farve et par af leddene midt på kæden, så man kan følge deres bevægelse og analysere denne med videoanalyse.

Bestem den konstante hastighed, som kæden falder med, og bestem højden h_2 . Den sidste er svær at bestemme, da det varierer lidt med tiden. Gentag forsøget for forskellige højder h_1 .

Undersøg, om de to højder er proportionale, og bestem proportionalitetskonstanten.

Undersøg om v^2 er proportional med h_1 , og bestem proportionalitetskonstanten.

Bestem α og β for kæden ud fra de to proportionalitetskonstanter.

8.8 SRP

Emnerne i dette kapitel egner sig fortrinligt som emner til en SRP. Sidst i afsnittet er også medtaget forslag til en SRO.

Opgaveformulering: Big Bang

Præsenter Friedmann-ligningerne og giv via den klassiske mekanik en begrundelse for deres udseende. Under forskellige antagelser om Universets tæthed og geometri skal du løse ligningerne, idet du præsenterer såvel analytiske som numeriske løsninger. Til numeriske løsninger skal du desuden vurdere fejlene ved metoden.

Du kan nøjes med undervejs kort at kommentere metoden for separation af de variable mens metoden til numerisk integration og fejlvurdering skal have en grundig behandling. Du afgør selv hvilke sætninger du vælger at bevise.

Sammenlign de forskellige modeller mht. udvikling og alder for Universet.

Opgaveformulering: Harmoniske svingninger

Du skal behandle den homogene, lineære andenordens differentialligning $y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$; herunder specielt tilfældet $y'' + k^2 \cdot y = 0$. Undervejs vælger du selv relevante dele ud som bevises i detaljer.

Derudover skal du beskrive såvel dæmpede som udæmpede harmoniske svingninger. Du skal bruge teorien for differentialligninger til at lave en model for svingningerne, og dernæst skal du eksperimentelt teste gyldigheden af modellen.

Under behandlingen af eksperimenterne ønskes bl.a. en vurdering af overensstemmelsen mellem model og eksperiment.

Eksempel på formulering af SRO:

En faldende genstand vil påvirkes af såvel tyngdekraften som luftmodstand. Genstandens hastighed vil derfor vokse langsommere end tilfældet er i et lufttomt rum, hvor væksten er lineær.

Med udgangspunkt i en fysisk karakterisering af systemet ønskes en beskrivelse af de væsentligste matematiske træk ved den relevante differentialligning og de tilhørende fysisk relevante løsninger. I denne forbindelse ønskes en gennemgang af beviset for separation af de variable. Separationsmetoden skal anvendes til at løse mindst to af nedenstående differentialligninger:

$$y' = k \cdot y$$

$$y' = a \cdot y + b$$

$$y' = y \cdot (b - a \cdot y)$$

$$y' = -b + a \cdot y^2$$

Modellen skal belyses med et eller flere selvvalgte, konkrete eksperimenter, som analyseres med henblik på at dokumentere anvendeligheden af de opstillede løsninger. I skal give en vurdering af overensstemmelsen mellem model og eksperiment, og kommentere eventuelle afvigelser.

Besvarelsens omfang forventes at være mellem 6 og 8 sider, hvortil kommer bilag i form af eksperimentelle data, grafer og lignende.

Opgaven skal indeholde et engelsk abstract på ca. 5-10 linier.

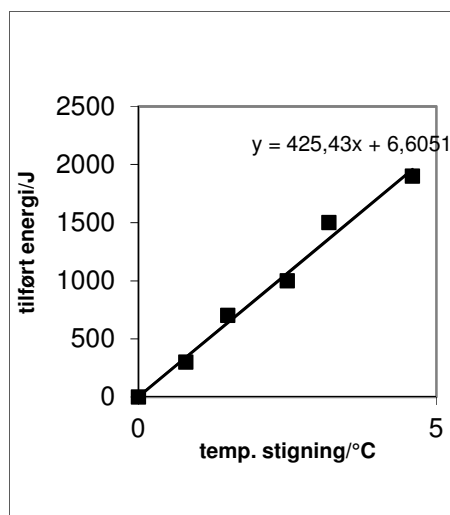
Kapitel 9. Regressionsmodeller

9.1 Introduktion

Når man ønsker at bestemme et stofs varmekapacitet, tilfører man en kendt mængde energi og måler temperaturstigningen. Dernæst tilføres yderligere energi og temperaturmålingen gentages. Efter et antal gange har man en række punkter som vist på figur 1 nedenfor. Det ses hurtigt, at punkterne ligger på en ret linje ganske som forventet, idet teorien siger at $\Delta E = C \cdot \Delta t$, hvor ΔE er den tilførte energi, Δt er temperaturstigningen og C er varmekapaciteten.

Man laver så lineær regression på sit foretrukne IT-værktøj og konstaterer, at varmekapaciteten (som er linjens hældningskoefficient) bliver $425 \text{ J/}^\circ\text{C}$, og at konstantleddet ligger meget tæt på nul, som det skal, da en energitilførsel på 0 J ikke bør give en højere temperatur.

Nu kunne det så være interessant at vide, hvad programmet egentlig gør for at finde *den bedste rette linje gennem punkterne*.⁹



9.2 Mindste kvadraters metode

Kigger man igen på figur 1, ser man, at linjen umiddelbart ser "rigtig" ud, fordi den enten går gennem eller ligger meget tæt på alle de målte punkter. Men hvordan afgør man matematisk, at netop denne linje ligger tættere på punkterne end så mange andre? Man har brug for et mål for afvigelsen.

Betegnelsen "mål" skal i denne sammenhæng ikke forstås som et spørgsmål om, hvad målet med det her er. For det er jo at finde den bedste rette linje gennem målepunkterne! Det, vi har brug for, er på en eller anden måde at kunne måle afvigelsen mellem linje og punkter.

Hvordan finder man et mål for afvigelsen?

Et godt mål for afvigelsen mellem den rette linje og de målte punkter skal tage hensyn til afstanden mellem alle de enkelte punkter og linjen, og alle punkter skal have den samme betydning for resultatet. Her vil vi se på den metode, hvor man måler den lodrette afstand mellem linjen og de enkelte punkter. Linjen har ligningen $y = ax + b$ og punkterne vil vi betegne (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) , hvor n er antallet af målepunkter. Den lodrette afstand mellem linjen og det første punkt er forskellen mellem y_1 og det man får, når man sætter x_1 ind i linjens ligning; dvs. $y_{\text{linje}} = ax_1 + b$. Se figur 2.

⁹ Egentlig burde akserne have været byttet om, da den uafhængige variabel her er den tilførte energi. Der kan være god grund til nogle gange at se bort fra reglen om at have den uafhængige variabel på førsteaksen, hvis fx hældningskoefficienten som her har en reel fysisk betydning.

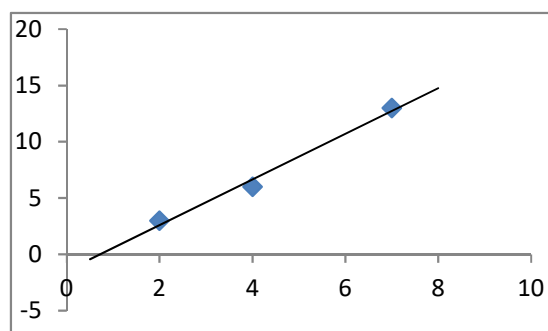
Forskellen $ax_1 + b - y_1$ er positiv, hvis punktet ligger under linjen og negativ hvis punktet ligger over linjen. Én måde at opnå et positivt tal hver gang er at bruge $(ax_1 + b - y_1)^2$ i stedet for. Den samlede afvigelse er så givet ved

$$S = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2.$$

Kunsten er så at vælge a og b så S bliver mindst mulig! Metoden kaldes for *mindste kvadraters metode*. Og den linje, der fremkommer når S minimeres er netop den vi betegner: *Den bedste rette linje gennem målepunkterne*¹⁰. (Har man arbejdet med χ^2 -test, kan man genkende ideen med at lægge kvadraterne på afvigelserne sammen for at beregne en teststørrelse).

Lad os se på et konkret eksempel, inden vi går i gang med den generelle formel. Nedenfor er givet tre punkter, og de er indtegnet i et koordinatsystem sammen med den linje, vi så skal finde ligningen for.

X	Y
2	3
4	6
7	13



Vi indsætter de tre punkter i formelen for S :

$$S = (2a + b - 3)^2 + (4a + b - 6)^2 + (7a + b - 13)^2.$$

Vi ser, at S er en funktion af to variable; nemlig a og b . Minimum for S findes som sædvanligt ved at differentiere. Først ser vi S som en funktion af a og holder b konstant. Ved at bruge reglen for differentiation af en sammensat funktion får man:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \cdot (2a + b - 3) \cdot 2 + 2 \cdot (4a + b - 6) \cdot 4 + 2 \cdot (7a + b - 13) \cdot 7$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 8a + 4b - 12 + 32a + 8b - 48 + 98a + 14b - 182$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 138a + 26b - 242$$

Det lidt krøllede bogstav ∂ bruges, når funktionen S er en funktion af flere variable, og man vælger kun at differentiere med hensyn til én af dem. Dette kaldes *partiel differentiation*. (Det er gennemgået i HEM 3, kapitel 6, *Funktioner af to variable*).

¹⁰ Egentlig burde man altid tilføje, at det er den bedste linje *i forhold til den valgte målemetode*. Men det er lidt klodset, så det udelades. Det er dog indeholdt i angivelsen af, at man har brugt *mindste kvadraters metode*. Men det er en vigtig pointe, for man kan ikke i absolut forstand bevise, at regressionslinjen er den bedste. Man kunne have valgt en anden målemetode. Der er gode statistiske argumenter for at vælge mindste kvadraters metode, men dem udelader vi her.

Tilsvarende skal man se S som en funktion af b og holde a konstant. Det giver:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \cdot (2a + b - 3) \cdot 1 + 2 \cdot (4a + b - 6) \cdot 1 + 2 \cdot (7a + b - 13) \cdot 1$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 4a + 2b - 6 + 8a + 2b - 12 + 14a + 2b - 26$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 26a + 6b - 44$$

Hvis der er et minimum er $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ og $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$. Disse to løses vha. et CAS-værktøj:

Vi finder: $a = 2,02632$ og $b = -1,44737$

Linjens ligning bliver altså: $y = 2,02632x - 1,44737$.

Opgave 45 Prøv nu selv at udføre lineær regression på de tre punkter, med brug af et CAS-værktøj og se, om I kan få det samme resultat.

Opgave 46 Læg mærke til, at vi argumenterede for, at *hvis* der er et minimum, *så* er de partielt afledede lig med 0. Men vi argumenterede ikke for, at det rent faktisk var et minimum, vi fandt. Forsøg selv at konstruere argumentet.

Vink: Bemærk at de tre led i summen alle giver parabler med et positivt A-tal, når man ser dem som funktioner af enten a eller b .

9.3 Den generelle formel

I det generelle tilfælde har vi n punkter, vi skal tage hensyn til. Summen der skal minimeres, er:

$$S = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2.$$

Vi differentierer igen først med hensyn til a og holder b konstant:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \cdot (ax_1 + b - y_1) \cdot x_1 + 2 \cdot (ax_2 + b - y_2) \cdot x_2 + \dots + 2 \cdot (ax_n + b - y_n) \cdot x_n$$

Vi ganger ind i parenteserne og får:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2ax_1^2 + 2bx_1 - 2x_1y_1 + 2ax_2^2 + 2bx_2 - 2x_2y_2 + \dots + 2ax_n^2 + 2bx_n - 2x_ny_n$$

Leddene samles, og a og b sættes udenfor parentes:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2a(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + 2b(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n).$$

Proceduren gentages nu, idet vi differentierer med hensyn til b og holder a konstant:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \cdot (ax_1 + b - y_1) \cdot 1 + 2 \cdot (ax_2 + b - y_2) \cdot 1 + \dots + 2 \cdot (ax_n + b - y_n) \cdot 1$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2ax_1 + 2b - 2y_1 + 2ax_2 + 2b - 2y_2 + \dots + 2ax_n + 2b - 2y_n$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + 2bn - 2(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

For at gøre ligningerne lidt mere overskuelige, når vi skal til at løse dem, indfører vi følgende betegnelser for summerne i parenteserne:

$$S_x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$S_{x^2} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$S_y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

$$S_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

Det giver os følgende udtryk:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2aS_{x^2} + 2bS_x - 2S_{xy} \quad \text{og} \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 2aS_x + 2bn - 2S_y.$$

De to afledede sættes lig nul, og ligningerne løses for at finde a og b :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 & \quad \text{og} \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \\ 2aS_{x^2} + 2bS_x - 2S_{xy} = 0 & \quad \text{og} \quad 2aS_x + 2bn - 2S_y = 0 \\ S_{x^2} \cdot a + S_x \cdot b = S_{xy} & \quad \text{og} \quad S_x \cdot a + n \cdot b = S_y \end{aligned}$$

Ligningerne løses nu med determinantmetoden (HEM A s 288, eller HEM 2, projekt 7.7):

$$a = \frac{\begin{vmatrix} S_{xy} & S_x \\ S_y & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{x^2} & S_x \\ S_x & n \end{vmatrix}} = \frac{n \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y}{n \cdot S_{x^2} - S_x^2} \quad \text{og} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} S_{x^2} & S_{xy} \\ S_x & S_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{x^2} & S_x \\ S_x & n \end{vmatrix}} = \frac{S_{x^2} \cdot S_y - S_x \cdot S_{xy}}{n \cdot S_{x^2} - S_x^2}.$$

Vi har netop vist følgende sætning:

Mindste kvadraters metode

Den bedste rette linje gennem punkterne (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ... og (x_n, y_n) er givet ved ligningen $y = ax + b$, hvor a og b er givet ved:

$$a = \frac{n \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y}{n \cdot S_{x^2} - S_x^2} \quad \text{og} \quad b = \frac{S_{x^2} \cdot S_y - S_x \cdot S_{xy}}{n \cdot S_{x^2} - S_x^2}$$

her er:

$$S_x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$S_{x^2} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$S_y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

$$S_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

9.4 Praktisk arbejde

Øvelse 13 Gnidningskraftens arbejde.

Nedenstående tabel indeholder data for begyndeshastigheden v_0 for en klods, der glider hen over gulvet, samt for hvor langt klodsens bevægede sig, inden den standsede Δs . Klodsens kinetiske energi i begyndelsen må være lig med gnidningskraftens samlede arbejde: $E_{\text{kin}} = F_{\text{gnid}} \cdot \Delta s$.

- Beregn den kinetiske energi i hvert tilfælde.
- Brug mindste kvadraters metode til at bestemme gnidningskraften.

Starthastighed v_0 (m/s)	Strækning Δs (m)
0,607	0,060
1,24	0,256
1,51	0,375
1,55	0,505
1,68	0,630
1,87	0,653
2,03	0,835
2,23	0,910
2,49	1,137
2,98	1,360

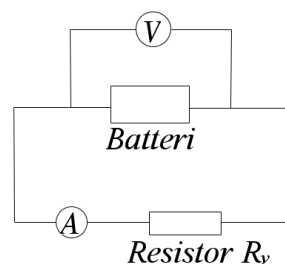
Øvelse 14 Hookes lov.

Udfør et eksperiment, hvor I måler fjederkraften F som funktion af forlængelsen af fjederen x .

Hookes lov siger, at $F = k \cdot x$, hvor k er fjederkonstanten. Brug mindste kvadraters metode til at beregne fjederkonstanten

Øvelse 15 Ohms 2. lov.

Forbind et batteri til en variabel resistor, og mål polspændingen for batteriet U og strømstyrken I for en række forskellige værdier af den ydre resistans R_y . Opstillingen er vist på illustrationen.



Bestem batteriets hvilespænding og indre resistans ved mindste kvadraters metode.

9.5 Kepler og Marsbanen

Astronomer havde længe overvejet, om der er en særlig lov, der gør, at planeterne er placeret i de afstande fra Solen som vi kan observere, og alene ud fra det empiriske materiale blev der formuleret en tese herom, der endda blev kaldt en lov: Titius-Bodes lov.

Da William Herschel i 1781 opdager planeten Uranus, og man konstaterer, at denne passer fint ind i loven, så går jagten ind på den manglende planet: Der mangler nemlig en planet mellem Mars og Jupiter.

Titius-Bodes lov

En version siger, at målt i *astronomiske enheder* (Jordens middelfastand til Solen), så befinder planet nr. n sig i en afstand fra Solen på:

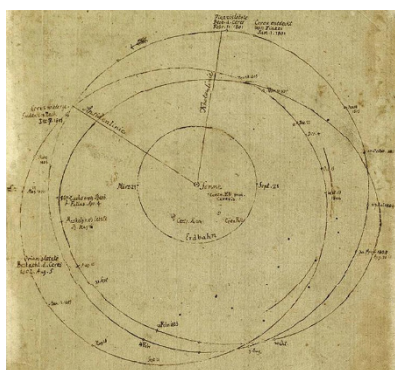
$$0,4 + 0,3 \cdot 2^n.$$

Her tager n værdierne $-\infty, 0, 1, 2, 3, \dots$
($-\infty$ giver værdien 0,4)

Der oprettes i Tyskland et såkaldt *Himmelpoliti*, der afsøger området mellem Mars og Jupiter, men det bliver en italiensk amatørastronom, der nytårs morgen 1801 opdager den nye planet. Han når imidlertid kun at optegne ganske få observationer, svarende til 3 grader af himmellegemets bane, da det forsvinder om bag Solen. Og man kan ikke finde det igen, da det skulle være dukket frem!



Himmelpolitiets observatorium i Lillienthal nær Bremen. Observatoriet nåede at finde yderligere tre småplaneter mellem Mars og Jupiter, inden det blev ødelagt under Napoleonskrigene, da Franskmændene i 1813 brændte byen af.



Gauss' originaltegning af Ceres' genopdagelse: Øverst til venstre har Gauss noteret: Ceres Wiedergefunden von Zach, Dec. 7, 1801

Med så få observationer ville alle dømmes hans muligheder for at bestemme banen ude. Men efter lange beregninger offentliggør han, hvor himmellegemet befinder sig, hvor himmelpolitiets skal rette kikkerten hen. Og den var der! Dette var mere end noget andet med til at gøre Gauss verdensberømt - som 24 årig. Himmelleget er en af asteroiderne, Ceres, og fik ikke status som planet. Men den ligger i den afstand loven foreskriver!

En rekonstruktion af Gauss' beregning af Ceres' bane er endog meget kompliceret at regne på, så i stedet vil vi vise metoden med et andet historisk eksempel: Keplers rekonstruktion af Mars' ellipsebane som et eksempel på anvendelse af ikke-lineær regression med mindste kvadraters metode.

Kepler selv kendte selvfølgelig ikke til mindste kvadraters metode, så han måtte regne sig igennem problemet med langt mere komplicerede metoder.

Forhistorien er den at Tycho Brahe gennem omhyggeligt udførte studier af Mars position på nattehimlen havde opbygget en unik liste af observationer, som Kepler kunne tage udgangspunkt i. Tycho Brahe noterede fra sit observatorium Uranienborg på Hven over mange år, hvor Mars stod på nattehimlen langs Ekliptika, Solens bane, og samtidigt noterede han også, hvor Solen stod langs Ekliptika. Særligt interessante er de observationer, der adskiller sig med netop 687 dage, som er Mars omløbstid omkring Solen, for da vidste Kepler, at Mars var tilbage på præcis det samme sted i sin bane omkring Solen: Her er et typisk eksempel fra Tycho Brahes observationer:

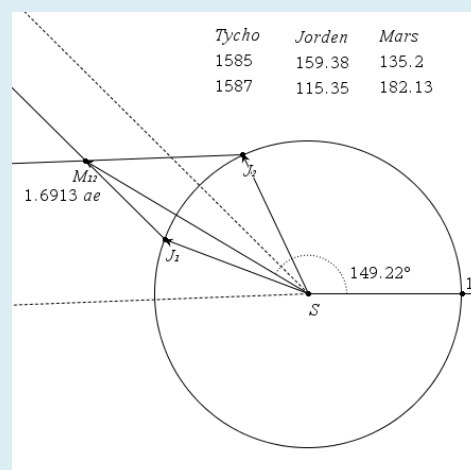
Dato	Heliocentrisk længdegrad for Jorden	Geocentrisk længdegrad for Mars
1585 Feb. 17	$159^{\circ} 23' = 159.38^{\circ}$	$135^{\circ} 12' = 135.20^{\circ}$
1587 Jan. 5	$115^{\circ} 21' = 115.35^{\circ}$	$182^{\circ} 08' = 182.13^{\circ}$

Øvelse 16 Udfør selv observationer

Du kan selv 'udføre' observationen ved at gå ind i et planetarieprogram, fx Stellarium, og tage en tur i tidsmaskinen. Du skal huske at tage højde for at planetarieprogrammet arbejder med den gregorianske kalender, mens Tycho Brahe brugte den julianske kalender, hvorfor der er 10-11 dages forskel på de to kalendere (alt eftersom observationen udføres før eller efter midnat). Den ovenstående dato indtastes derfor fx som den 27. februar 1985. Find først den præcise position for Uranienborg

Øvelse 17 En geometriske version af Keplers beregning

Kepler kendte ikke Jordens afstand til Solen, men satte den til én astronomisk enhed. Ydermere antog han i første omgang at Jorden bevægede sig en cirkel omkring Solen. De heliocentriske længdegrader gav da Jordens position de to datoer. Samtidigt gav de geocentriske længdegrader retningsvinklerne til Mars set fra Jorden. Vi kan altså nemt konstruere de to sigtelinjer til Mars og dermed finde Mars position. Her er Kepler især interesseret i afstanden fra Solen til Mars og retningsvinklen fra Solen til Mars, dvs. den heliocentriske længdegrad for Mars. Kepler regnede - vi konstruerer i stedet i et dynamisk geometriprogram. Først opretter vi Jordens bane omkring Solen som en cirkel med radius 1 astronomisk enhed. Så drejer vi enhedspunktet på Jordens bane (forårspunktet) med 159.38° henholdsvis 115.35° for at finde Jordens position J_1 og J_2 de to dage. Derefter drejer vi den vandrette sigtelinje med 135.20° henholdsvis 182.13° og forskyder de to sigtelinjer, så de udgår fra Jorden. Der hvor de to sigtelinjer skærer hinanden befandt Mars sig de to dage.



Vi kan nu aflæse (eller som Kepler bruge hård trigonometri kun med støtte af tabeller, dvs. de indbyggede sinus- og cosinusfunktioner) at afstanden til Mars var 1.6913 astronomiske enheder og at retningsvinklen til Mars, den såkaldte heliocentriske længdegrad, var 149.22° . Vi kender altså nu det første punkt på Mars bane. Fortsætter vi på denne måde kan vi finde fx fem udvalgte punkter på Mars bane ud fra Tycho Brahes observationer og omsætte dem til afstande og retningsvinkler for Mars.

Opgave 47 Her er et udsnit af Tycho Brahes Mars data fra Keplers Astronomia Nova:

Dato	Heliocentriske længdegrad for Jorden	Geocentriske længdegrad for Mars
1585 Feb. 17	$159^\circ 23'$	$135^\circ 12'$
1587 Jan. 5	$115^\circ 21'$	$182^\circ 08'$
1591 Sep. 19	$5^\circ 47'$	$284^\circ 18'$
1593 Aug. 6	$323^\circ 26'$	$346^\circ 56'$
1593 Dec. 7	$85^\circ 53'$	$3^\circ 04'$
1595 Oct. 25	$41^\circ 42'$	$49^\circ 42'$
1587 Mar. 28	$196^\circ 50'$	$168^\circ 12'$
1589 Feb. 12	$153^\circ 42'$	$218^\circ 48'$
1585 Mar. 10	$179^\circ 41'$	$131^\circ 48'$
1587 Jan. 26	$136^\circ 06'$	$184^\circ 42'$

Omsæt de fundne observationer til heliocentriske koordinater for Mars.

Resultatet ses i det viste skema. Disse observationer udelukker selvfølgelig, at Mars følger en jævn cirkelbane omkring Solen med Solen i centrum, da afstanden til Solen jo i hvert fald varierer fra 1.38 ae til 1.69 ae, men det vidste Kepler sådan set godt. Allerede Ptolemæus havde foreslået at Solen lå excentrisk (uden for centrum), dvs. et stykke væk fra centrum i cirkelbanen, hvorfor Solen somme-tider lå tættere på Mars og somme tider længere væk fra Mars.

Observation	Mars afstand fra Solen	Mars retningsvinkel
1,2	1.6913 ae	149.22°
3,4	1.3789 ae	330.12°
5,6	1.5027 ae	44.39°
7,8	1.6390 ae	185.20°
9,10	1.6747 ae	158.09°

Spørgsmålet er altså blot om en excentrisk cirkelbane er forenelig med netop disse data? Eller om de bedre er forenelige med en ellipsebane med Solen i det ene brændpunkt? Kepler havde selvfølgelig flere data til sin rådighed, men vi vil koncentrere os om de ovenfor fundne fem positioner langs Mars bane.

Før vi regner skal vi lige have definitionerne på plads (se illustrationerne nedenfor):

For en cirkel med radius a , hvor Solen befinder sig et stykke uden for centrum, defineres excentriciteten som:

$$e_{\text{cirkel}} = \frac{|CS|}{a}, \text{ hvor } C \text{ er centrum, } S \text{ er Solens placering og } a \text{ er radius}$$

Heraf får vi: $|CS| = a \cdot e_{\text{cirkel}}$.

For en ellipse, der er karakteriseret ved sine to brændpunkter, gælder der, at summen af afstandene fra et vilkårligt punkt på ellipsen til de to brændpunkter er en konstant. Ellipsen er fladtrykt, så her er der ikke én

radius, men en *storakse* a , og en *lilleakse* b . I en ellipse-model for planetbanerne er Solen placeret i et af brændpunkterne. Excentriciteten, der her måler graden af fladtrykthed er defineret:

$$e_{\text{ellipse}} = \frac{|CS|}{a}, \text{ hvor } C \text{ er centrum, } S \text{ er Solens placering og } a \text{ er storaksen.}$$

Heraf får vi: $|CS| = a \cdot e_{\text{ellipse}}$.

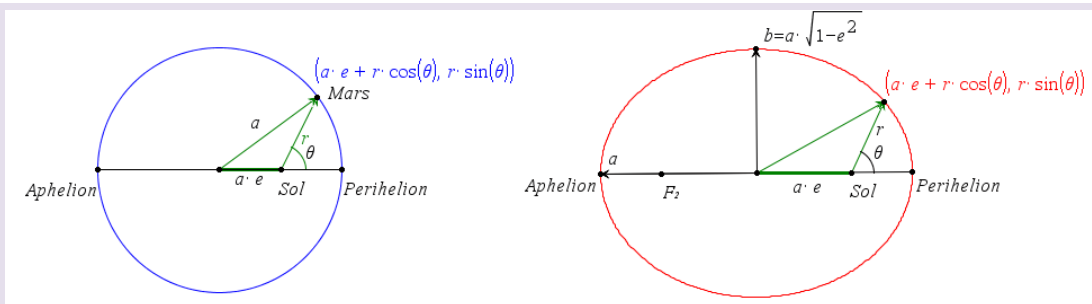
I HEM B, kapitel 0, afsnit 1 og i HEM 2, kapitel 7, afsnit 1 er ellipsen behandlet. Her vises blandt andet, at ellipsen kan beskrives ved ligningen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

samt formen, der kæder a , b og e sammen:

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

Opgave 48



Excentrisk cirkelmodel for Marsbanen

Ellipsemodel for Marsbanen

I begge modeller kaldes a for den halve storakse og e for excentriciteten

a) Vis, at der i begge modeller gælder:

1) $r_{\min} = a \cdot (1 - e)$ (Perihelion)

2) $r_{\max} = a \cdot (1 + e)$ (Aphelion)

3) $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$

4) $e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$

Vi vil nu finde ligningerne, der binder radius og retningsvinkel sammen, for de to modeller:

Opgave 49

a) Gør rede for at der i cirkelmodellen gælder: $a^2 = a^2 \cdot e^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot r \cdot \cos(\theta) + r^2$

b) Gør rede for at der i ellipsemodellen gælder: $r + r \cdot e \cdot \cos(\theta) = a \cdot (1 - e^2)$

(Vink: For punkt a): Anvend cosinus-relationerne. For punkt b): Kald planetpunktet $P(x, y)$ og vis ved afstandsformlen og brug af ellipsens ligning, at $r^2 = (a - e \cdot x)^2$. Kontroller dine udregninger med udregningerne på bogens **website**

Bemærkning: I begge modellerne forudsættes det at akserne ligger vandret, men det behøver jo ikke gælde oppe på himlen. Så der har akserne i stedet en retningsvinkel θ_0 og modelligningerne hedder derfor

$$\text{Excentrisk cirkelbane: } a^2 = a^2 \cdot e^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot r \cdot \cos(\theta - \theta_0) + r^2$$

$$\text{Ellipsebane: } r + r \cdot e \cdot \cos(\theta - \theta_0) = a \cdot (1 - e^2)$$

med modelparametrene a (den halve storakse), e (excentriciteten) og θ_0 (retningsvinklen til perihelion). Til at bestemme disse tre modelparametre har Kepler adgang til fem datapunkter, dvs. han kan opstille 5 ligninger og derved bestemme de 3 parametre.

I praksis kunne han forsøge sig med at løse 3 ligninger med 3 ukendte, og se hvordan de to sidste ligninger opførte sig, men selv det var meget svært for Kepler! Så i stedet satsede han på at der blandt Tycho Brahes data var to observationer, der fastlægger perihelet og apehelet. De to første datapunkter adskiller sig netop stort set med 180° og har en meget høj afstand til Solen henholdsvis en meget lav afstand til Solen. Kepler satsede derfor på at de netop udgjorde perihelet og apehelet for Mars bane og regnede glad videre på modellen, der nu kunne forenkles betydeligt!

Her prøver vi i stedet at tillempe modellerne, så de bedst muligt går gennem de fem datapunkter. Vi vil først forsøge at transformere ligningerne om, så de passer bedst muligt med *en lineær model*. Den grimme ikke-lineære parameter er retningsvinklen θ_0 . Den gemmer vi væk i projektionen på den halve storakse, dvs. vi indfører variabelen $x = r \cdot \cos(\theta - \theta_0)$ og opfatter storaksen som en x -akse med nulpunkt i Solen.

Opgave 50 Gør rede for at den excentriske cirkelbaneligning kan omskrives på formen:

$$a^2 = a^2 \cdot e^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot x + r^2 \Rightarrow r^2 = -2 \cdot a \cdot e \cdot x + a^2 \cdot (1 - e^2)$$

Kvadratet på afstanden er altså i denne model en lineær funktion af projektionen x , på formen $r^2 = A_1 \cdot x + B_1$.

b) Gør rede for at ellipsebanens ligning kan omskrives på formen:

$$r + e \cdot x = a \cdot (1 - e^2) \Rightarrow r = -e \cdot x + a \cdot (1 - e^2)$$

Afstanden er altså i denne model en lineær funktion af projektionen x , på formen

$$r = A_2 \cdot x + B_2.$$

c) Gør rede for at sammenhængen mellem de to modeller er givet ved

$$r_{\text{ellipse}}^2 = r_{\text{cirkel}}^2 \cdot (1 - e^2) + e^2 \cdot x^2.$$

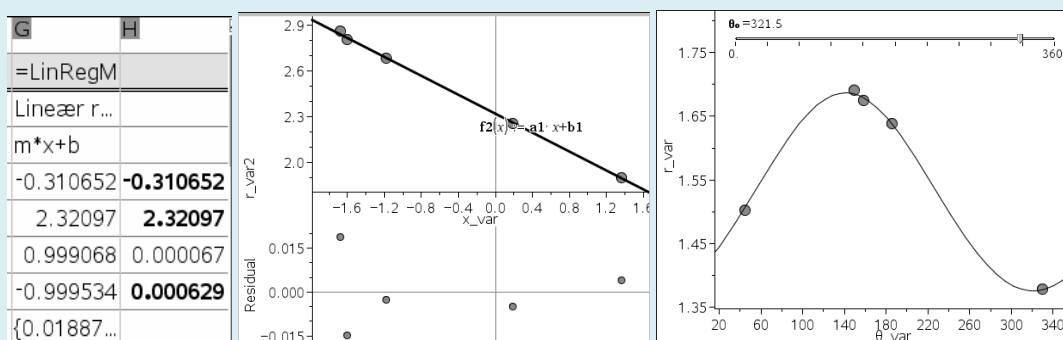
d) Hvis excentriciteten e er lille, fx 0.1, hvor stor er så den relative forskel mellem r_{ellipse} og r_{cirkel} ?

Opgave 50 giver os nu en opskrift på, hvad vi skal gøre.

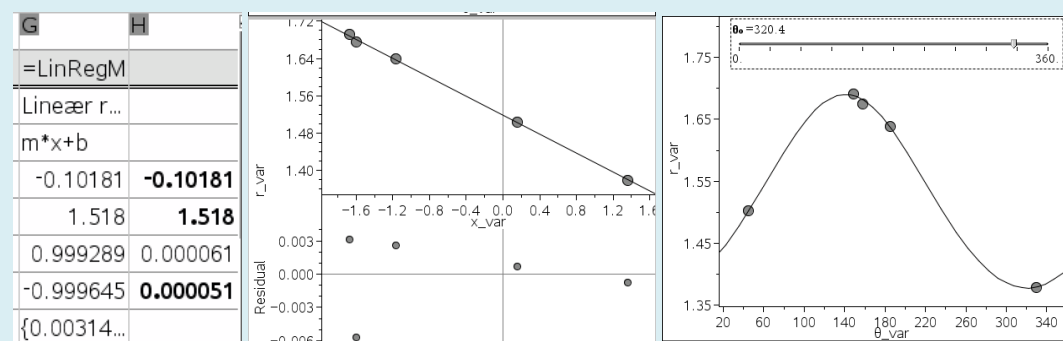
Øvelse 16

Ekspirerter selv med modellerne

Vi indfører en skyder for perihel-vinklen θ_0 og udregner projektionen x . Derefter udfører vi en lineær regression på henholdsvis kvadratet på afstanden og selve afstanden som funktion af projektionen x . Det giver os den bedste rette linje gennem de transformerede datapunkter. Da denne rette linje afhænger af perihel-vinklen θ_0 trækker vi nu forsigtigt i skyderen for perihel-vinklen og kan grafisk se hvornår de transformerede data samler sig omkring en ret linje. Vi kan også holde øje med summen af kvadraterne på residualerne i den lineære model: Jo mindre den er, jo bedre er modellen ifølge mindste kvadraters metode.



Den excentriske cirkelmodel



Keplers Ellipsemodel

- Opgave 51**
- Vis at summen af residualkvadraterne for den excentriske cirkelmodel er givet ved 0.000629.
 - Vis at summen af residualkvadraterne for Keplers ellipsemodel er givet ved 0.000051.

- Opgave 52**
- Tegn den fundne excentriske cirkelmodel oven i marspunkterne og vurdér overensstemmelsen.
 - Tegn den fundne ellipsemodel oven i marspunkterne og vurdér overensstemmelsen.

Formelt klarer ellipsebanen sig en anelse bedre end den excentriske cirkelmodel. Men forskellen er så lille, fordi excentriciteten på ca. 0.10 er så tilpas lille, at vi i praksis *ikke* kan bruge de fem datapunkter til at afgøre om cirkelmodellen skal forkastes, og at vi derfor er tvunget til at beskrive Marsbanen som en ellipsebane.

For at komme frem til den konklusion måtte Kepler dykke længere ned i Tycho Brahes observations-manualer og regne videre i yderligere nogle år. For det første må han som udgangspunkt forbedre Jordens bane-model og inddrage det faktum, at også Jordens bane er excentrisk – noget, der fx fremgår af de forskellige længder af årstiderne, dvs. tidsrummene mellem solhverv og jævndøgn. For det andet så befinder den tydeligste afvigelse sig i ellipsens to øvrige toppunkter, endepunkterne for lilleaksen. I den excentriske cirkelmodel er der ingen forskel på storeaksen og lilleakse, idet begge to er givet ved cirkelns diameter.

Men i en ellipse er den halve lilleakse givet ved $b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}$. En omhyggelig udmåling af den halve lilleakse b kan altså ikke blot vise at den effektivt er mindre end a , men også at den er rimelig overensstemmelse med ellipseformlen, hvilket var et af Keplers vigtigste indicier for ellipsebanen.

9.6 SRP

Emnerne i dette kapitel egner sig fortrinligt til emner for en srp.

Opgave om mindste kvadraters metode og ... (konkrete fysiske lovmæssigheder som Hooke's lov, der indrages med empiriske data og evt. med en matematisk modellering)

Opgave om Ellipser, excentriske cirkler og konstruktion af Marsbanen

Kapitel 10. Lyd, harmoniske svingninger og fourieranalyse

Det følgende er en beskrivelse af lyd vha. harmoniske svingninger. Først beskrives det rent fysiske fænomen lyd, derefter kommer en beskrivelse af lyd som en ren tone, og dermed en sinusfunktion, eller sammensat af flere toner altså en sum af sinusfunktioner. Fourieranalyse beskrives og anvendes på lyd. Endvidere beskrives sampling og digitalisering af lyd. Undervejs får man gennemgået det grundlæggende kernestof om lyd for fysik B og A. I kapitel 15 i HEM A og i HEM 3 om fagligt samarbejde mellem matematik og musik, vil du finde en dybere analyse af toner og musik og en gennemgang af Fourieranalyse, parallelt med den følgende, men med særlig toning på den musikalske klang.

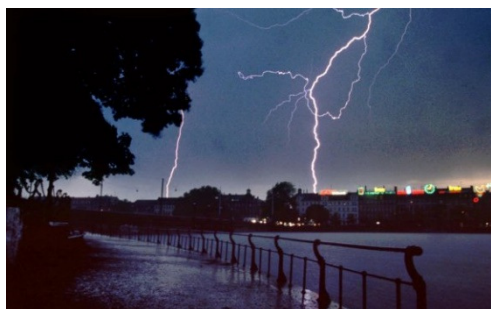
10.1 Hvad er lyd?

Når bladene på træerne bevæges af vinden, eller når en stol trækkes hen over et gulv, bliver luftens molekyler sat i svingninger og der frembringes lyd. Når de første luftmolekyler sættes i bevægelse, så skubber de til de næste osv. og på den måde udbredes en lydølge gennem luftmolekylerne uden at de hver især bevæger sig ret langt væk fra deres ligevægtsposition (det atmosfæriske tryk). Udsvingene er faktisk så små, at for en lyd, der er så kraftig, at man skal bruge høreværn, svinger trykket kun ca. en hundredetusindedel af atmosfæretrykket! Dvs. de svingninger i luften, som man kan mærke på kroppen, når man står meget tæt på en højtaler til en rockkoncert, kommer gennem luften med et ganske voldsomt tryk. Bølgerne er selvfølgelig ikke synlige for os, men lyden udbreder sig efter samme principper som ringe i vandet, hvis man kaster en sten i en stille sø.

Lydstyrken (lydtrykket), måles i enheden decibel (dB), hvor den svageste hørbare lyd har lydstyrken 0 dB, mens lydstyrken for en lyd, der kræver høreværn 120 dB. I HEM C (HEM 1, kapitel omtalte vi decibelskalaen, som er logaritmisk. Som en tommelfingerregel kan man lige netop høre forskel i styrken på to lyde, hvis de har en forskel på 1 dB. En forskel på 3 dB høres tydeligt, og hvis to lyde har en forskel på 10 dB, vil den ene lyde omtrent dobbelt så kraftig som den anden.

Hvor hurtigt lyden bevæger sig afhænger både af det medium, lyden skal bevæge sig igennem (luft, vand, etc.) og af dette mediums temperatur. Lydens hastighed er fx meget højere i vand end i luft, hvilket man let kan registrere, når man fx svømmer under vandet i havet og hører lyden af en bådmotor. Da vi er vant til at bevæge os i luft, forventer vi at se båden lige i nærheden, når vi kigger op over vandet, men det viser sig altid, at båden faktisk ligger meget længere væk. Lydens hastighed i vand er mere end 4 gange større end i luft!	Stof	Lydens hastighed
	Luft	343 m/s
	Vand	1482 m/s
	CO ₂	268 m/s
	Træ (eg)	4100 m/s
	Glas	5044 m/s
	Stål (jern)	5190 m/s

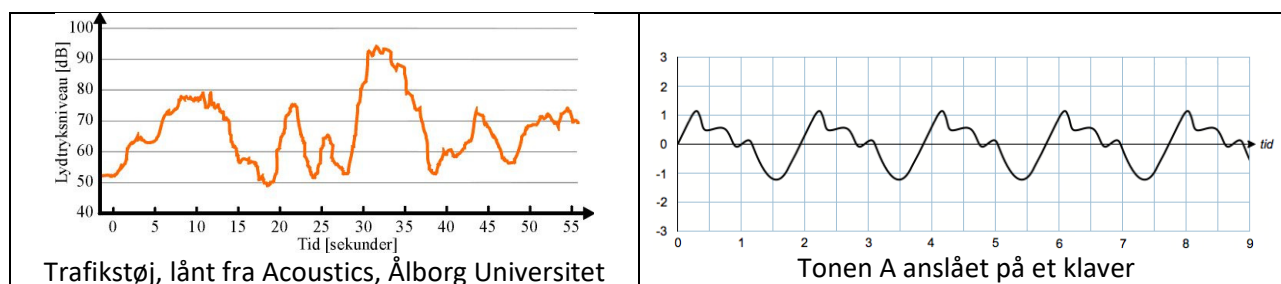
Lydens hastighed ved 20°C.



Lyd bevæger sig langsommere end lys. Hvis du står 1 km væk fra et sted, hvor der kommer et lyn, så ser du næsten øjeblikkeligt lysglimt, fordi lys udbreder sig meget hurtigt, mens du må vente på tordenbraget. Lyden af tordenbraget vil være cirka 3 sekunder forsinket (1000 m divideret med lydens hastighed 340 m/s). Man kan derfor nemt beregne et overslag over, hvor langt tordenvejret er væk, ved at tælle sekunder mellem lysglimt og tordenbrag, og derefter dividere med 3.

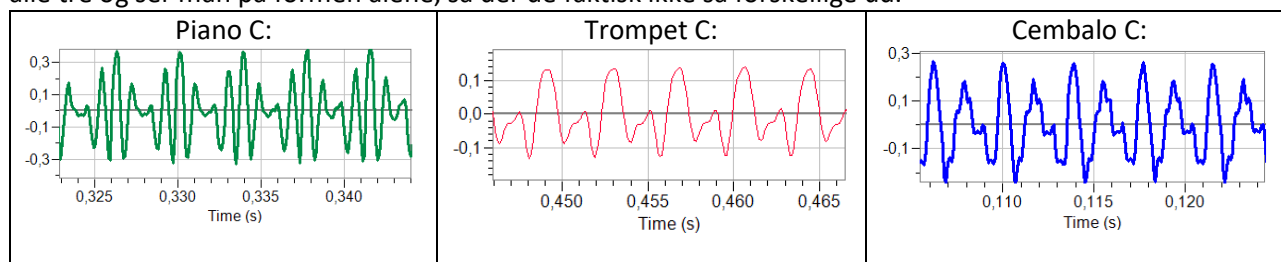
10.2 Lydopfattelse - Støj eller musik?

Blandt de lyde vi kan hører, kategoriserer vi noget som støj. Støj stammer fra en eller anden uregelmæssig vibration, og hvis vi skulle tegne en graf, der beskriver trykket på trommehinden som funktion af tiden, så ville den måske se ud som vist på figuren t,v, der er en repræsentation af trafikstøj



Lyden af musik er af en anden karakter, og ser vi igen på lydtrykket som funktion af tiden, så kan musik fx beskrives således: Musik er karakteriseret ved tilstedeværelsen af kortere- eller længerevarende toner afhængigt af hvordan fx en klavertangent berøres eller en guitarstreng anslås. Som vi ser på grafen t.h., så er musik karakteriseret ved en vis periodicitet, dvs. visse sekvenser optræder gentagende gange efter hinanden.

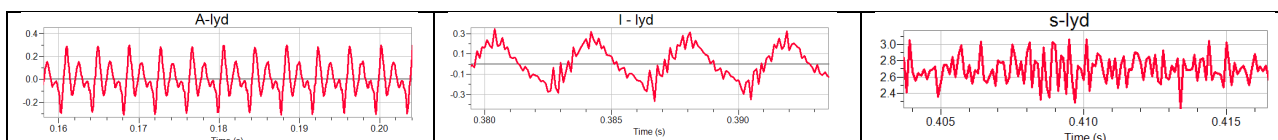
Her ses lydbølgerne for tonen C på tre forskellige musikinstrumenter. Vi ser tydeligt et periodisk mønster i alle tre og ser man på formen alene, så der de faktisk ikke så forskellige ud.



Musikere beskriver som oftest musikalske toner ud fra tre karakteristika: Lydstyrke, tonehøjde og klang. *Lydstyrken* er et udtryk for de trykændringer, man oplever, og derfor taler man også sommetider om lydtrykket fra en højttaler.

Tonehøjden er et udtryk for hvor lang tid den periodiske grundsekvens varer (svingningstiden). Eller sagt på en anden måde: Lydens *tonehøjde* er bestemt af, hvor hurtige svingningerne i luften er. Det kalder man for lydens *frekvens*, og den måles i Hertz, som forkortes Hz, og den måler antallet af svingninger pr. sekund. Dybe toner har lave frekvenser (få Hz), høje toner har høje frekvenser (mange Hz). De fleste lyde ligger mellem 20 Hz og 20000 Hz. Lyd med frekvenser over 20000 Hz kaldes ultralyd og lyd under 20 Hz kaldes infralyd. Lyde med frekvenser fra ca. 2000 Hz til 20000 Hz kalder man højfrekvente lyde (fx diskanttoner), mens lyde fra 20 Hz til ca. 200 Hz kaldes lavfrekvente lyde (fx bastoner). Lyd med frekvenser ind imellem de højfrekvente og lavfrekvente lyde kaldes mellemtonerne, og her finder man fx almindelig tale.

Klangen er det, der gør, at vi på trods af samme lydstyrke og tonehøjde er i stand til at skelne en bestemt tone spillet på forskellige instrumenter, og klangen giver faktisk afgørende forskelle i det periodiske mønster. Klangen i lyden af tale er bestemt ved de forskellige vokal-lyde. Disse fremkommer ved at mundens form ændres, således at der opstår forskellige typer af vibrationer i luften inde i munden. Altså er det mundes form, der bestemmer frekvensen og amplituden for lyden af tale.



Når vi hører en tone, så er det, vi opfatter, tonens frekvens, og når vi hører musik sammensat af en masse toner, så opfatter vi alle disse toners frekvenser i en skøn blanding. *En tone består i musikalsk sammenhæng af dels grundtonen (grundfrekvensen) og dels harmoniske overtoner, hvis frekvenser alle er bestemt ud fra grundtonens frekvens, idet disse netop er et helt antal gange grundtonens frekvens.* Når fuglene synger hører vi på samme måde toner og harmoniske overtoner, men når vi hører fx mågeskrig og løvebrøl, så indeholder lyden andre overtoner end de harmoniske.

<p>Her ses lydbølgens udvikling i tid samt amplituden som funktion af frekvensen, dvs. lydstyrken af de forskellige overtoner, for tonen C samt samme tone en oktav højere – her kaldet hhv. C1 og C2. Begge toner svinger med pæne perioder, men C2 har en pænere kurve, dvs. tonen C1 er sammensat af flere toner end C2.</p>	<p>A time-domain plot of a complex periodic waveform labeled 'C1'. The y-axis represents amplitude from 2.5 to 2.7, and the x-axis represents time from 0.09 to 0.13 seconds.</p>	<p>A time-domain plot of a smooth periodic waveform labeled 'C2'. The y-axis represents amplitude from 2.60 to 2.70, and the x-axis represents time from 0.31 to 0.33 seconds.</p>
<p>Ser vi på frekvensbillederne, ser vi klart grundtonen med den høje amplitude og overtonerne med lavere amplituder. Vi ser også at C2 har færre betydende overtoner end C1. Betegnelsen FFT betyder, "Fast Fourier Transformation", og vi vil senere i kapitlet få indblik i, hvad den proces handler om.</p>	<p>A Fast Fourier Transform (FFT) plot for tone C1. The y-axis is 'Amplitude' from 0.000 to 0.020, and the x-axis is 'Frequency (Hz)' from 0 to 2000. It shows a prominent peak at approximately 260 Hz and several smaller peaks at higher frequencies.</p>	<p>A Fast Fourier Transform (FFT) plot for tone C2. The y-axis is 'Amplitude' from 0.00 to 0.03, and the x-axis is 'Frequency (Hz)' from 0 to 2000. It shows a very sharp and dominant peak at approximately 260 Hz with very few other significant peaks.</p>

Tonen og dens overtoner giver tilsammen tonens *klang*. I den vestlige musik bruges 12 toner som grundtoner: C, Cis, D, Dis, E, F, Fis, G, Gis, A, Ais, H, og disse udgør tilsammen en oktav.

Ligger to toner en oktav fra hinanden, svinger den højeste tone præcis dobbelt så hurtigt som den laveste. Den vestlige kammertone A4 har frekvensen 440 Hz, dvs. 440 svingninger pr. sekund.

Øvelse 17 Lytteøvelser - tonerækken

Via Gert Uttenthals hjemmeside: <http://www.frborg-gymhf.dk/gj/talogtangen-ter/indexh.htm> kan du finde og høre lyden af den traditionelle tonerække og en række andre. Den traditionelle tonerække er:

Tone	C	Cis	D	Dis	E	F	Fis	G	Gis	A	Ais	H
Frekvens (Hz)	261.6	277.2	293.7	311.1	329.6	349.2	370.0	392.0	415.3	440	466.1	493.9

Den omtalte hjemmeside er referencen i HEM A og 3, kapitel 15, *Fagligt samarbejde matematik og musik*. På din smartphone kan du også finde forskellige lydprogrammer, hvor du selv kan spille tonerne. Og meget mere, som vi vender tilbage til.

10.3 Lydbølger

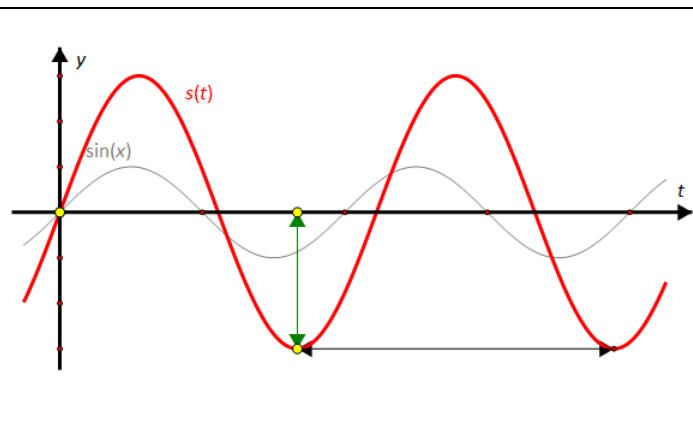
Rene toner – rene sinussvingninger

En såkaldt ren tone (en grundtone), er en tone der kun indeholder én frekvens, dvs. den er fri for overtoner. Lydsvingningen svarende til en ren tone kan beskrives ved én sinusfunktion:

$$s(t) = a \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

hvor $s(t)$ betegner lydstyrken (målt i dB) til tidspunktet t (målt i sekunder).

På figurens ses grafen for en funktion af den type, hvor det fremgår, at den faktisk bare en elastisk udgave sinusfunktion, som man har trukket i både lodret og vandret.



A kaldes *amplituden*, og er et udtryk for lydets intensitet.

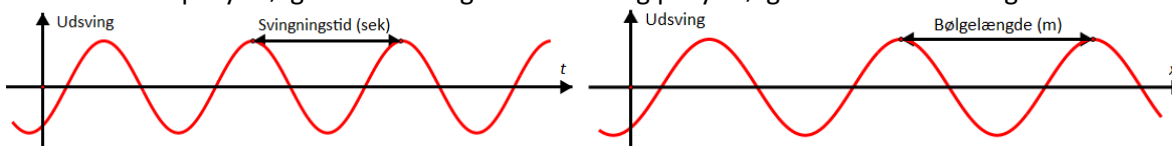
f er *frekvensen* (målt i Hz), dvs. antallet af svingninger pr. sekund, og når vi ganger frekvensen med 2π tager vi højde for, at funktionens periode kan være forskellig fra sinusfunktionens periode på 2π .

Frekvensen hænger sammen med tonens periodiske mønster. Funktionens periode er den tid det tager for bølgen at udføre én hel svingning – svarende til den tid, der går mellem fx to bølgetoppe. *Perioden (svingningstiden) betegnes T* , og der gælder, at $f = \frac{1}{T}$.

Man skal være opmærksom på, at lydbølgen jo flytter sig både i tid og rum. Ser vi på lydbølgens tidsmæssige forløb, taler vi om perioden som et tidsrum, nemlig svingningstiden. Ser vi i stedet på lydbølgens afstandsmæssige forløb, så taler vi om perioden som lydbølgens bølgelængde. Sammenhængen mellem

svingningstiden og bølgelængden er således, at i løbet af én svingning bevæger lydbølgen sig netop en bølgelængde fremad.

Perioden målt på lydbølgens tidmæssig udbredelse og på lydbølgens afstandsmæssige udbredelse.



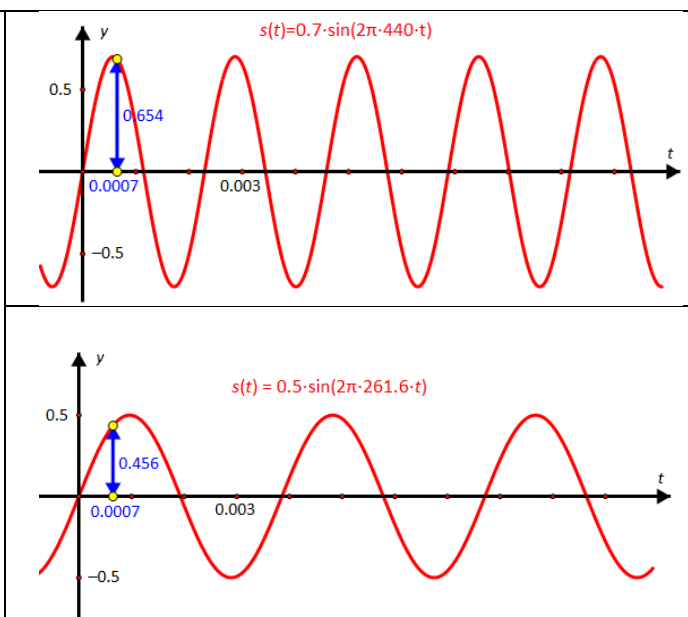
Opgave 53 Tegn graferne for hver af følgende funktioner i t -intervallet $[-5; 20]$ – husk, at indstille dit værktøjsprogram, så graferne tegnes i radianer, og aflæs for hver funktion perioden, som afstanden mellem to bølgetoppe (evt. zoom ind for at aflæse):

- $s_1(t) = 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 0,5 \cdot t)$
- $s_2(t) = 5 \cdot \sin(2\pi \cdot 2 \cdot t)$
- $s_3(t) = 12 \cdot \sin(2\pi \cdot 8 \cdot t)$

Sammensatte toner og interferens – sum af sinussvingninger

Når to eller flere bølger befinder sig på samme sted til samme tidspunkt, så vil de påvirke hinanden, og man siger at de *interferere*. De interfererer på en sådan måde, at den samlede bølge, der frembringes, når de to bølger møder hinanden får et udsving, der svarer til de to bølgers udsving lagt sammen (regnet med fortegn!). Dette kaldes *superpositionsprincippet*. Dvs. når flere toner sammensættes, opstår en ny lydbølge, hvis amplitude og frekvens afhænger af de indgående toners amplituder og frekvenser.

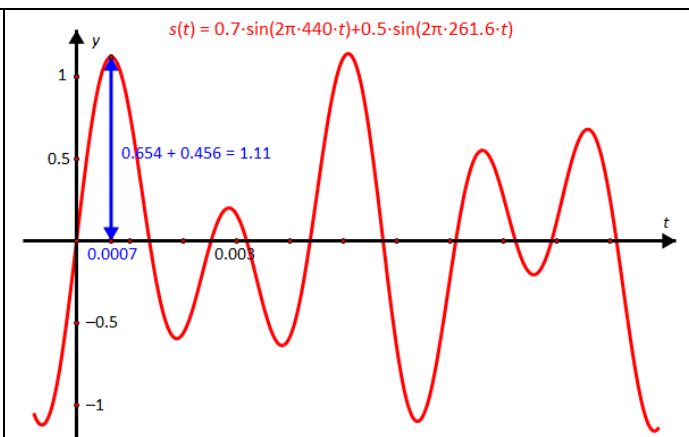
På figuren ses en tone, sammensat af de to rene toner, nemlig kammertonen A, som har frekvens 440 Hz (med amplitude 0,7) og tonen



C, som har en frekvens på 261,6 Hz (med amplitude på 0,5).

Den sammensatte tone kan derfor matematisk beskrives ved en sum af de to sinusfunktioner, som beskriver hver af de to toner, dvs.:
 $s(t) = 0,7 \cdot \sin(2\pi \cdot 440 \cdot t) + 0,5 \cdot \sin(2\pi \cdot 261,2 \cdot t)$

Når vi hører toner fra musikinstrumenter, så er disse toner normalt sammensatte toner, og det er netop derfor, vi gider høre på dem! Rene toner lyder nemlig som oftest kedelige og monotone, som du måske hørte ovenfor.



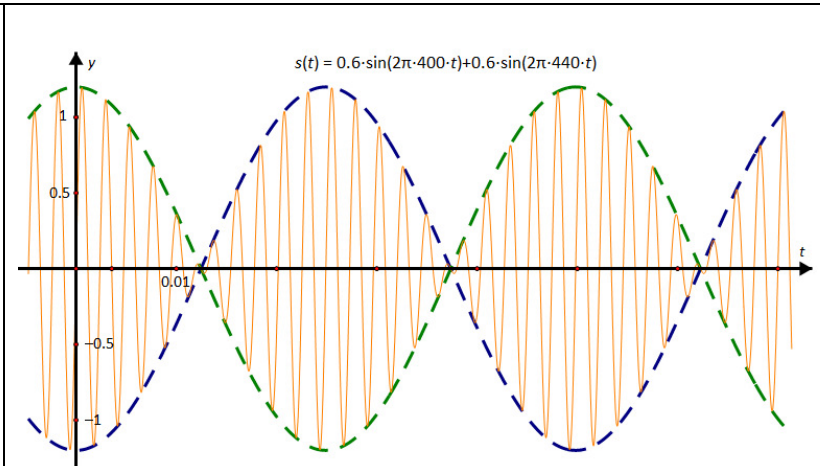
Øvelse 18	<p>Eksperimentere med at summere svingninger</p> <p>Vælg to andre toner sammensæt disse, idet du anvender amplituderne 0,6 og 0,9. Frekvenserne finder du på klavertangent-oversigten på en af de foregående sider. Læg en tone mere til – vælg selv amplituden!</p> <p>Konstruér din helt egen lyd, idet du lægger en antal toners sinuskurver sammen med passende amplituder valgt i intervallet $[0; 1]$.</p>
------------------	--

10.4 Eksempel: Guitarens svingende streng

Stødtoner

Når to lydbølger med samme amplitude, men med lidt forskellig frekvens, interfererer, så frembringes en stødton (svævninger). På figuren ses en sinuskurven for en stødton frembragt af to lyde med frekvenser på henholdsvis $f_1 = 400$ Hz og $f_2 = 440$ Hz og fælles amplitude på 0,6.

Man kan vise, at stødene forekommer med en frekvens $f_{stød}$ givet ved formlen $f_{stød} = f_2 - f_1$.



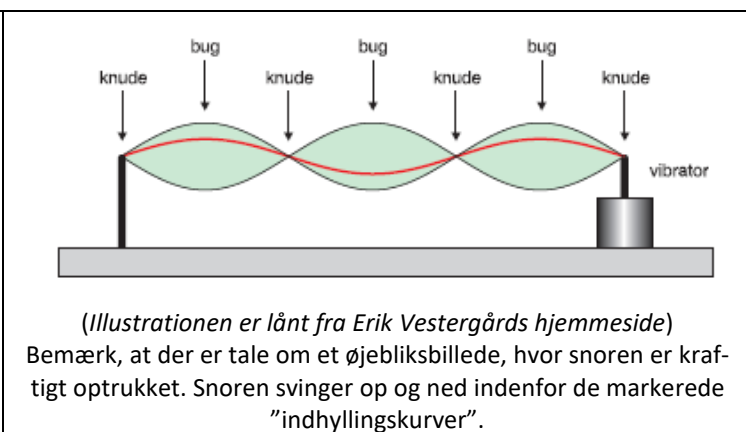
Når en sum af forskellige sinussvingninger (med fælles amplitude) skal udtrykkes som én svingning, anvendes de *logaritiske formler* til den omskrivning. Disse formler vender vi tilbage til.

Øvelse 19	<p>Ekspirertere med stødtoner</p> <p>Rent praktisk kan stødtoner frembringes ved hjælp af to ens stemmegafler monteret på resonanskasser. For at reducere frekvensen for den ene sætter man en skrue på. Derefter anslås de to stemmegafler samtidigt. Via hjemmesiden kan du finde en video, som viser dette lille forsøg, hvor man tydeligt kan høre at tonen ”stødes”.</p> <p>https://www.youtube.com/watch?v=aCocQa2Bcuc</p> <p>Du kan finde YouTube fim, der illustrerer stort set alle fænomener, du vil undersøge.</p>
------------------	--

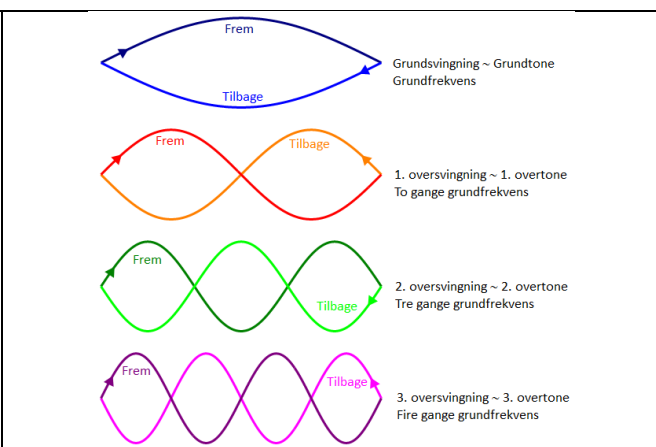
Stødtoner bruges, når man skal stemme en guitar. Gitaren stemmes ved at man drejer på stemmeskruerne, så strengens spændes mere eller mindre. Når man anslår én streng, og holder den næste streng nede på et bestemt bånd, skal strengene frembringe samme tone, dvs. samme frekvens. Hvis de ikke gør det, er gitaren ikke stemt korrekt. Når man slår strengene an på en guitar, der ikke er stemt korrekt, man vil derfor kunne fornemme stødtonerne, og jo tættere strengenes frekvens er på hinanden des længere vil stødene lyde.

Når man sætter en streng i svingninger, så vil strengen vibrere og sende bølger frem og tilbage (refleksion) mellem strengens fæstningspunkter. Disse bølger vil interferere og deres udsving lægges sammen efter superpositionsprincippet.

Det betyder, at nogle af bølgerne vil dø ud, mens andre vil forstærkes. Hvis strengen vibrerer med en ganske bestemt frekvens, som giver anledning til det fænomen, som kaldes *stående bølger*, som betyder, at bestemte steder på strengen fremkommer der store udsving (kaldes en bug), mens der andre steder intet udsving er (kaldes en knude). Antallet af buge afhænger naturligvis af strengens (vibrations-)frekvens.



Den svingende streng illustrerer meget fint, hvordan lydbølger udvikler sig. Hvis vi igen ser på en tone og dennes harmoniske overtoner, så vil grundtonen svare til, at vi ser én bug (svarende til denne tones frekvens), mens overtonerne svarer til situationer med flere buge. Når strengens frekvens fx fordobles, så vil der fremkomme 2 buge, og denne situation svarer til 1. overtone, når strengens frekvens tredobles, så vil der fremkomme 3 buge, og denne situation vil svare til 2. overtone osv.



Hvis vi slår en guitarstreng an, så frembringer vi på samme måde bølger, der bevæger sig frem og tilbage langs strengen over længere tid, idet de reflekteres, der hvor strengen er fastgjort (stol og hoved). Uanset, hvor kompliceret bølgen er, så vil den gentage sig selv netop, når den har gennemløbet strengen to gange (frem og tilbage), og hermed frembringes et periodisk mønster. På samme måde vil den frembragte lyd være periodisk og velklingende – der frembringes musik!

Du kan her se videoer, der illustrerer fænomenet i slowmotion:

Guitarstreng – slowmotion: <http://www.youtube.com/watch?v=gFrnQq8RZJQ&feature=related>

Violin – slowmotion: <http://www.youtube.com/watch?v=kqpU1t2cCk&feature=related>

Lydbølgerne interferer med hinanden, og kun de lydbølger, der giver anledning til stående bølger, har betydning for den lyd vi hører, fordi de andre dør ud. Der findes altså en samling stående bølger, som tilsammen frembringer lyden af de toner / den musik som guitaristen spiller. Lyden fra hver streng er som tidligere nævnt en sammensat tone, der består af en grundtone og dennes harmoniske overtoner. Grundtonens og overtonernes amplituder afhænger af, hvordan strengen anslås – både hvor på strengen og kvaliteten af anslaget (let/hårdt etc.). Bølgerne på strengen kan i sig selv ikke høres. Frekvenserne af lydbølgerne vil være de samme som frekvenserne af bølgerne på strengen.

10.5 Matematisk beskrivelse af det sammensatte lydbillede

Opsplitning af en kompleks lyd i en sum af sinussvingninger

Der er blevet eksperimenteret med lyd, så længe der har været mennesker. Og man har givetvis tidligt opdaget, at der er nogle præcise sammenhænge mellem de toner, vi synes klinger harmonisk sammen, og de tilsvarende længder på de svingende strenge, eller på de hule rør, vi blæser i. Vi har overleveringer om sådanne eksperimenter fra de første matematiske samfund. For 2500 år siden opdagede pythagoræerne nogle af disse simple sammenhænge mellem en grundtones bølgelængde, og bølgelængderne af overtonerne, der alle er $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ eller $\frac{1}{n}$ af grundtonens bølgelængde. Eller udtrykt med frekvenserne: Frekvenserne af overtonerne er alle 2, 3, 4, .. eller n gange så store som grundtonens frekvens.

Slår vi én tone an, frembringes samtidig en række overtoner. Og når et helt orkester med en række forskellige instrumenter spiller sammen, så frembringes godt nok et komplekst lydbillede – men et lydbillede, vi kan opfatte som en sammensætning af, eller en sum af en lang række rene sinussvingninger. Musikken bages altså billedligt talt af alle disse ingredienser.

Man kan godt forstå, hvordan man kan bage en kage ud fra en opskrift. Opskriften er her partituret, og vi så i sidste afsnit, hvordan man lægger to forskellige sinussvingninger sammen. Kan man lægge to sammen, så kan man også lægge flere sammen og få et mere komplekst lydbillede. Men kan man også gå den anden vej - lave opskriften, når man har kagen?

Hvis man optager lyden af et stykke orkestermusik, og ser på den grafiske fremstilling heraf, så ser det på den ene side voldsomt kompliceret ud, men på den anden side ved vi jo, at det er frembragt af en lang række enkelt-instrumenter. Så i det tilfælde, hvor vi ved, at lydbilledet er frembragt som en sum af en masse rene svingninger, så er det ikke en helt vild tanke, at man måske kan finde ud af, hvad denne lyd er sammensat af! Rent teoretisk kunne man selvfølgelig godt forestille sig, at to *forskellige* summer af rene

svingninger kunne frembringe det samme lydbillede. Men det strider mod vores erfaring med lyd og musik – ethvert lydbillede er resultat af en unik kombination af rene svingninger.

Og hvis det er tilfældet for lyd, så er det en nærliggende tanke, at det gælder for alle svingningsfænomener, at komplekse svingninger kan opfattes som en sum af rene svingninger – det kan være fænomener som tidevandsbevægelser, røntgenstråling fra fjerne stjerner, himmellegemernes bevægelser mm. Det sidste eksempel var allerede et tema for astronomerne i det gamle Babylon, der havde til opgave at forudsige himmellegemernes bevægelser, og dertil søgte at opløse fx månens komplicerede bevægelse i en sum af nogle simple bevægelser. Den samme bestræbelse ser vi hos antikkens store astronom Ptolemaios. De prøvede sig frem ud fra den tilgængelige empiri.

Men vi skal frem til 1800 tallet før problemet finder sin teoretiske afklaring, først og fremmest gennem det arbejde den franske matematiker og fysiker Joseph Fourier (1768–1830) udførte. Fourier studerede egentlig varmeteorien og specielt hvordan varme udbreder sig gennem et medie. I 1807 udgiver han værket *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, og I årene efter udvikler han en helt ny matematisk teori, der kunne hjælpe ham i hans studier. Han fremlægger sin nye teori i 1822 i værket *Théorie analytique de la chaleur*, eller i engelsk oversættelse: *The Analytical Theory of Heat*, og det skulle vise sig, at den nye teori kunne anvendes langt ud over sin oprindelse i varmeteorien

Fouriers teori forklarer dels, hvordan en sammensat svingning / tone kan beskrives ved en sum af trigonometriske funktioner med hver sin frekvens og amplitude. Den laveste frekvens, der optræder, er grundfrekvensen, som svarer til grundtonen. Grundtonens overtoner har frekvenser, der alle er et helt tal gange grundfrekvensen. Og han angiver en metode til at bestemme disse rene svingninger og deres amplituder.

Dette vil vi fordybe os i, i det følgende.

Men hans teori er meget mere radikal. Fourier påstår i sit værk, at enhver funktion, kontinuert eller diskontinuert, kan skrives som en sum af trigonometriske funktioner med hver sin frekvens og amplitude. Dvs. denne opslutning i rene svingninger er ikke forbeholdt svingningsfænomener! Det var et ekstremt overraskende resultat, at alt kan skrives som en sum af sinus og cosinus funktioner. Det er faktisk heller ikke korrekt i sin generelle form, men på Fouriers tid er de funktioner, man arbejder med og i det hele taget forestiller sig ganske pæne – og for dem gælder det! Få år senere, i 1829 lykkes det den tyske matematiker Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) at vise, under hvilke (ret generelle) betingelser påstanden gælder. Ideen i dette bevis er, at man for en given funktion opskriver dennes *Fourier-række*, som angivet i sætningen nedenfor, og så beviser, at denne konvergerer med funktionen.

Sætning: Fourierrækken for en funktion

Givet en funktion $f(t)$, der er defineret på et lukket interval $[0;T]$, og som er integrabel her. Hvis der om $f(t)$ gælder, at funktionen har højst endeligt mange lokale ekstrema, og højst endeligt mange diskontinuitetspunkter, så findes der koefficienter a_n og b_n , så $f(t)$ kan skrives:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot n \cdot t\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot n \cdot t\right)$$

Koefficienterne beregnes således:

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot n \cdot t\right) dt, \quad \text{for } n=0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot n \cdot t\right) dt, \quad \text{for } n=1,2,\dots$$

Bemærkning 1: Der er ikke mange funktioner, man kan komme på, som ikke opfylder betingelserne. Men Dirichlet gav et eksempel på en, som siden er blevet kaldt Dirichlets funktion: Det er funktionen, der antager værdierne 1 i alle rationale x -værdier og 0 i de irrationale.

Bemærkning 2: Lighedstegnet i formlen betyder, at de endelige summer op til N af højresidens udtryk konvergerer mod $f(t)$, når $N \rightarrow \infty$. Men definitionen af konvergens er ikke så ligetil her.

Læg mærke til, at funktionen er defineret i et begrænset og lukket interval $[0;T]$. En almindelig funktion er jo ikke periodisk som sin og cos er det. Men vi forestiller os så, at funktionen kunne udvides til alle tal ved blot at gentage den for hvert interval af længde T . Det ville jo så være en periodisk funktion.

Den matematiske disciplin, hvor vi udregner og opstiller fourierrækken for en given funktion, kaldes for *Fourieranalyse*. Amplituderne for de enkelte svingninger a_n og b_n kaldes for *Fourierkoefficienterne*

Den generelle version af sætningen er ganske svær at bevise, og beviset kræver kendskab til en del videregående matematik. **Vi vil i stedet i det følgende betragte den specielle situation, hvor vi antager, at vi ved, at en given funktion $s(t)$ er en sum af rene svingninger. Under denne antagelse vi så udlede formlerne for Fourierkoefficienterne.**

Den første overvejelse drejer sig om følgende: Hvorfor kan vi ikke nøjes med at se på en sum af sinus-svingninger? Hvorfor er vi nødt til også at inddrage cosinus?

Hvis alle toner blev anslået synkront, dvs startede præcis samtidig, så kunne vi beskrive lydbølgen for en sammensat tone, som en sum af sinusfunktioner. Lydstyrken $s(t)$ til tidspunktet t ville kunne beskrives ved en funktion af typen:

$$s(t) = c_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t) + c_1 \cdot \sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + \dots + c_n \cdot \sin(2\pi \cdot f_n \cdot t) + \dots$$

hvor c_n betegner amplituden og f_n betegner frekvensen. Det første led svarer til grundtonen, det næste til 1. overtone, det tredje til 2. overtone osv.

Men dette udtryk tager ikke hensyn til at nogle toner i et lydbillede ikke starter samtidigt, så derfor må vi igennem en lidt kompliceret omskrivning. Resultatet lander dog i noget forbløffende simpelt, nemlig den ovenstående sum, kompletteret med cosinusfunktioner:

$$s(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + \dots + a_n \cdot \cos(2\pi \cdot f_n \cdot t) + b_n \cdot \sin(2\pi \cdot f_n \cdot t) + \dots$$

For at gøre udtrykket lidt simplere at se på, indfører vi et nyt begreb, som kaldes *vinkelhastighed* og betegnes ω . Vinkelhastigheden hænger sammen med *perioden* T :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

dvs. den fortæller noget om, hvor mange perioder svingningen når at gennemføre inden for tidsrummet 2π , dvs. hvis perioden er 2π , så er vinkelhastigheden netop 1.

Sammenhængen mellem frekvensen f og perioden T er: $T = \frac{1}{f}$.

Udnyt dette i formlen for ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \cdot f$$

Dvs. vinkelhastigheden er proportional med frekvensen, med proportionalitetskonstant 2π . Det betyder, at når vi ganger frekvensen med en faktor k , så bliver vinkelhastigheden også k gange større:

$$\omega_k = 2\pi \cdot (k \cdot f) = k \cdot (2\pi \cdot f) = k \cdot \omega$$

Denne egenskab får vi brug for, fordi vi vil se på en tones grundtone og overtoner, hvor overtonernes frekvenser jo netop er et helt antal gange større end grundfrekvensen.

Det er denne sammenhæng vi vil udnytte i det følgende, dvs. vi omskriver $s(t)$ til:

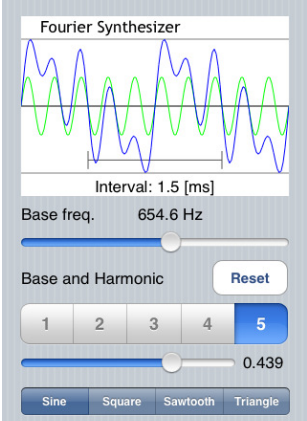
$$s(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + \dots + a_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + b_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \dots$$

10.6 Præsentation af Fourieranalyse

Fourier Analyse er i dag indbygget som en automatisk proces i mange lydbehandlingsprogrammer, hvor den betegnes FFT, der betyder *Fast Fourier Transformation*. Hvis vi får informationer om amplitude og periode for en given lydbølge, der er sammensat af en række toner, så kan vi opstille et matematisk udtryk, der beskriver lydbølgen – vi kan bestemme en forskrift for den funktion $s(t)$, som har lydbølgen som graf.

Med et lydbehandlingsprogram kan vi altså bestemme de indgående toners frekvenser og deres amplituder. Amplituderne kaldes også for Fourierkoefficienterne – det er disse værdier Fourier Analysen giver os.

Eksempel: Fast Fourier analyse på smartphones

	<p>Der findes i dag applikationer til smartphones, som kan afspille lyden af en bestemt tone (bestemt grundfrekvens) og dens overtoner (helt tal gange grundfrekvens). Brug fx søgeordet "Fourier".</p> <p>Programmet kan både samle (synthesize) og opsplitte (analyze) lydbilleder. På illustrationen har vi samlet forskellige rene toner til et lydbillede. Vi vil nu gå den anden vej og analysere tonen C.</p> <p>Programmet giver os med det samme de relevante frekvenser og amplituder, så vi kan opskrive formlen.</p>
---	--

Øvelse 20	Bestem Fourierspektret Afprøv en sådan applikation fx på tonen C og få vist Fourierspektret. Hvilke frekvenser har overtonerne?
------------------	--

<p>Lad os sige, vi har fået følgende FFT-spektrum af tonen C (FFT betyder <i>Fast Fourier Transformation</i>).</p> <p>Her ser vi, hvordan et computerprogram ved Fourier Analyse genskaber tonens bestanddele – først grundtonen og derefter alle dens overtoner, hvor man kan aflæse hver tones amplitude og frekvens.</p>	
---	--

Grundtonens frekvens er 261,2 Hz, og vi kan aflæse grundtonens amplitude til 0,019, mens overtonernes amplituder er:

1. overtone	2. overtone	3. overtone	4. overtone	5. overtone	6. overtone
0,012	0,005	0,001	0,003	0,001	0,002

Vi kan således opbygge den lydfunktion, der beskriver denne tone:

$$s(t) = 0,019 \cdot \sin(2\pi \cdot 261,2 \cdot t) + 0,012 \cdot \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 261,2 \cdot t) + 0,005 \cdot \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 261,2 \cdot t) + 0,001 \cdot \sin(2\pi \cdot 4 \cdot 261,2 \cdot t) + \dots$$

Øvelse 21	<p>Fouriersyntese</p> <p>Tegn grafen og se, at vi får et billede, der ligner det, vi så i afsnit 10.2 for tonen C på forskellige instrumenter.</p>	
------------------	---	--

Beregning af Fourierkoefficienterne – indledende overvejelser om symmetri

Vi tager nu fat på den teoretiske undersøgelse af Fourierkoefficienterne.

Vi starter med noget indledende teori.

Definition: Middelværdi for en funktion

Middelværdien for en kontinuert funktion s over intervallet $[a; b]$ er bestemt ved integralet:

$$s_{\text{middel}} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b s(t) dt$$

Om middelværdier gælder følgende sætning, som vi får brug for.

Sætning: Middelværdien for en sum af funktioner

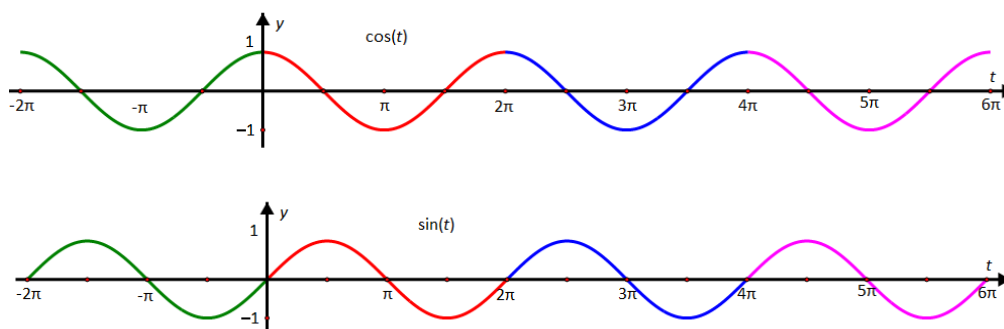
Middelværdien for en sum af funktioner er summen af middelværdierne, dvs. hvis

$s(t) = s_0(t) + s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + \dots$, så er middelværdien for s :

$$s_{\text{middel}} = s_{0 \text{ middel}} + s_{1 \text{ middel}} + s_{2 \text{ middel}} + s_{3 \text{ middel}} + \dots$$

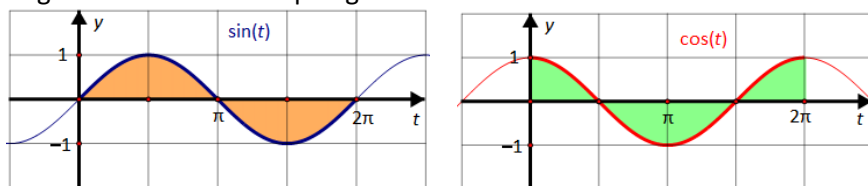
Sætningen følger let af regnereglerne for integralregning.

Vi har brug for at vide lidt mere om cosinus- og sinusfunktionernes egenskaber, inden vi fortsætter. Når vi ser på de graferne for de to funktioner, er det klart, at de er periodiske med en periode på 2π :



Vi ser også at cosinusfunktionen er symmetrisk omkring y -aksen, mens sinusfunktionen er symmetrisk omkring $(0,0)$.

Ser vi nu i første omgang på én periode $[0; 2\pi]$, så afgrænser graferne hver især sammen med førsteaksen nogle områder som vist på figurerne:



Pga. symmetriegenskaberne, så er arealet af områderne under og over førsteaksen for hver af de to funktioner lige store.

Vi ved at, at integralet af en negativ funktion er negativt, og da sinus funktionen er positiv i første halvdel af intervallet og negativ i anden halvdel af intervallet og i øvrigt symmetrisk i sin form, så betyder det ved brug af indskudssætningen, at

$$\int_0^{\pi} \sin(t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t) dt = 0$$

og dermed at

$$\int_0^{2\pi} \sin(t) dt = 0$$

På tilsvarende vis kan vi konkludere, at

$$\int_0^{2\pi} \cos(t) dt = 0$$

Opgave 54

- e) Tegn graferne for funktionerne $p(t) = \cos(n \cdot t)$ og $q(t) = \sin(n \cdot t)$, hvor n er et helt tal, idet du definerer n ved en skyder, der kun kan antage heltallige værdier.
- f) Argumentér ud fra graferne for, at der på lignende vis må gælde, at

$$\int_0^{2\pi} \sin(n \cdot t) dt = 0 \quad \text{og} \quad \int_0^{2\pi} \cos(n \cdot t) dt = 0$$

g) Beregn også integralerne med dit værktøjsprogram.

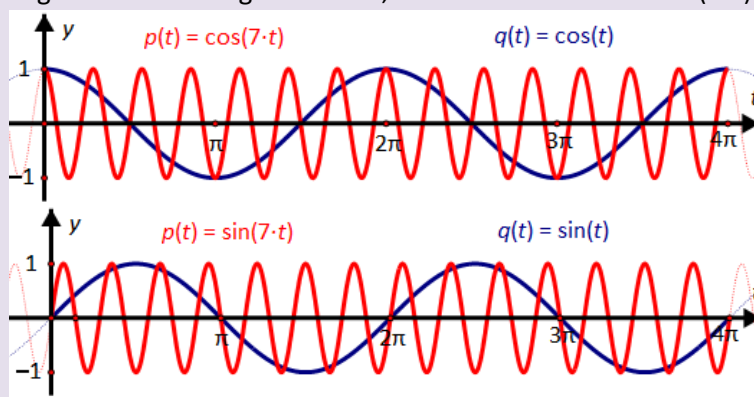
Opgave 55 Ser vi nu på middelværdierne af cosinus- og sinusfunktionerne $\cos(n \cdot t)$ og $\sin(n \cdot t)$, hvor n er et helt tal, i intervallet $[0; 2\pi]$, så må der ligesom ovenfor gælde, at

$$\sin_{\text{middel}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin(n \cdot t) dt = 0 \quad \text{og} \quad \cos_{\text{middel}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(n \cdot t) dt = 0$$

Tilsvarende vil vi kunne argumentere, hvis vi ser på cosinus- og sinusfunktioner over et helt antal perioder m , dvs. der må gælde, at

$$\int_0^{m \cdot 2\pi} \sin(n \cdot t) dt = 0 \quad \text{og} \quad \int_0^{m \cdot 2\pi} \cos(n \cdot t) dt = 0$$

Opgave 56 Argumentér ud fra graferne for, at middelværdien for $\cos(7 \cdot t)$ og $\sin(7 \cdot t)$ må være nul.



Argumentér ud fra graferne for, at

$$\int_0^{2 \cdot 2\pi} \sin(7 \cdot t) dt = 0 \quad \text{og} \quad \int_0^{2 \cdot 2\pi} \cos(7 \cdot t) dt = 0$$

Beregning af Fourierkoefficienterne for $s(t)$

Vi vender nu tilbage og ser på $s(t)$ over én periode, dvs. fra $t=0$ til $t=T$, hvor T betegner perioden for s :

$$s(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + a_2 \cdot \cos(2\omega \cdot t) + b_2 \cdot \sin(2\omega \cdot t) + \dots + \dots + \dots$$

Vi beregner middelværdien for funktionen over intervallet $[0; T]$ ved

$$s_{\text{middel}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t) dt$$

og denne middelværdi må jo være den samme som middelværdien af højresiden i udtrykket for $s(t)$, dvs.

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + a_2 \cdot \cos(2\omega \cdot t) + b_2 \cdot \sin(2\omega \cdot t) + \dots + \dots) dt$$

Da a_0 er konstant, så er middelværdien blot a_0 selv.

Ifølge sætningen ovenfor er middelværdien af en sum, det samme som summen af alle middelværdierne for hvert led, dvs. vi skal altså bestemme middelværdierne for hvert led for sig:

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T a_0 dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t)) dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (a_2 \cdot \cos(2\omega \cdot t) + b_2 \cdot \sin(2\omega \cdot t)) dt + \dots$$

Vi har lige set, at middelværdien for cosinus- og sinusfunktionen over et helt antal perioder er nul. Dvs. middelværdien for hver af de to funktioner i hvert af de harmoniske led vil blive nul i intervallet $[0; T]$, og dermed er middelværdien for summen af alle de harmoniske led også nul – altså er der kun konstantleddet a_0 tilbage:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t) dt &= a_0 + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T a_2 \cdot \cos(2\omega \cdot t) dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T b_2 \cdot \sin(2\omega \cdot t) dt + \dots \\ &= a_0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= a_0 \end{aligned}$$

Hermed har vi bestemt den første Fourierkoefficient $a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t) dt$!

Altså hvis vi kender $s(t)$ og perioden, så kan vi også bestemme a_0 .

Vi bestemmer nu de andre Fourierkoefficienter (amplituder), og bruger her et trick, som Fourier fandt på:

Hvis vi ganger begge sider af $s(t)$ med en harmonisk funktion fx $\cos(7\omega \cdot t)$, så får vi, idet vi på højresiden jo skal gange hvert enkelt led med $\cos(7\omega \cdot t)$ (hvor vi har skrevet de harmoniske led op ovenover hinanden for at skabe overblik):

$$\begin{aligned} \cos(7\omega \cdot t) \cdot s(t) &= a_0 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \\ &+ a_1 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) + b_1 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ &+ a_2 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \cos(2\omega \cdot t) + b_2 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(2\omega \cdot t) \\ &+ \dots \quad + \dots \\ &+ a_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \cos(7\omega \cdot t) + b_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(7\omega \cdot t) \\ &+ \dots \quad + \dots \end{aligned}$$

Nu bestemmer vi så igen middelværdien på hver side af lighedstegnet.

Da middelværdien af en sum er lig med summen af middelværdierne, ser vi på hvert led for sig.

Vi får således middelværdien af første led ved:

$$\text{Led1}_{\text{middel}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \cos(7\omega \cdot t) \cdot a_0 dt = \frac{1}{T} \cdot a_0 \cdot \int_0^T \cos(7\omega \cdot t) dt$$

hvor vi har sat konstanten a_0 udenfor integraltegnet.

Men middelværdien for $\cos(7\omega \cdot t)$ i intervallet $[0; T]$ er jo netop nul, som vi argumenterede for ovenfor!

Derfor er $\text{Led1}_{\text{middel}} = 0$.

Middelværdien for $a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(7\omega \cdot t)$ over en periode T viser sig også at blive nul!

<p>For at nå dertil har vi brug for endnu en omskrivning. Vi anvender en af de såkaldte logaritmiske formler, der siger:</p> $\cos(A) \cdot \cos(B) = \frac{1}{2} \cdot \cos(A+B) + \frac{1}{2} \cdot \cos(A-B)$	<p>De logaritmiske formler</p> $\sin(A) \cdot \cos(B) = \frac{1}{2} \cdot \sin(A+B) + \frac{1}{2} \cdot \sin(A-B)$ $\cos(A) \cdot \sin(B) = \frac{1}{2} \cdot \sin(A+B) - \frac{1}{2} \cdot \sin(A-B)$ $\cos(A) \cdot \cos(B) = \frac{1}{2} \cdot \cos(A+B) + \frac{1}{2} \cdot \cos(A-B)$ $\sin(A) \cdot \sin(B) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(A+B) - \frac{1}{2} \cdot \cos(A-B)$
--	--

dvs. der må gælde, at

$$a_1 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos(7\omega \cdot t + \omega \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(7\omega \cdot t - \omega \cdot t) \right) \quad \text{Anvend logaritmisk formel}$$

$$a_1 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos(8\omega \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(6\omega \cdot t) \right) \quad \text{Reducer i parentes}$$

$$a_1 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot (\cos(8\omega \cdot t) + \cos(6\omega \cdot t)) \quad \text{Sæt } \frac{1}{2} \text{ udenfor}$$

Vi bestemmer nu middelværdien for højresiden:

$$\begin{aligned} \text{Led2}_{\text{middel}} &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot (\cos(8\omega \cdot t) + \cos(6\omega \cdot t)) dt && \text{Anvend middelværdi} \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot \int_0^T (\cos(8\omega \cdot t) + \cos(6\omega \cdot t)) dt && \text{Sæt konstanter udenfor} \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot \left(\int_0^T \cos(8\omega \cdot t) dt + \int_0^T \cos(6\omega \cdot t) dt \right) && \text{Anvend sumregel for integration} \end{aligned}$$

Men igen er integralerne i parentesens jo nul, så derfor er $\text{Led2}_{\text{middel}} = 0$.

På samme måde kan vi vise, at middelværdien af hvert af de harmoniske led, der indeholder a -koefficienterne (amplituderne), bliver nul – med undtagelse af ét! Nemlig dette:

$$a_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \cos(7\omega \cdot t)$$

Når vi omskriver, får vi:

$$a_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \cos(7\omega \cdot t) = a_7 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos(7\omega \cdot t + 7\omega \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(7\omega \cdot t - 7\omega \cdot t) \right)$$

$$a_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \cos(7\omega \cdot t) = a_7 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos(14\omega \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(0) \right) \quad \text{Reducer i parenteser}$$

$$a_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \cos(7\omega \cdot t) = a_7 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos(14\omega \cdot t) + 1) \quad \text{Udnyt, at } \cos(0) = 1$$

Middelværdien for $\cos(14\omega \cdot t)$ er nul (som ovenfor), men middelværdien af den konstante funktion 1 er jo 1, så derfor får vi:

$$\begin{aligned} \text{Led7}_{\text{middel}} &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T a_7 \cdot (\cos(7\omega \cdot t) + \cos(7\omega \cdot t)) dt && \text{Middelværdi af venstre side} \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T a_7 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos(14\omega \cdot t) + 1) dt && \dots \text{det samme om middelværdi af højre side} \\ &= \frac{1}{T} \cdot a_7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^T \cos(14\omega \cdot t) dt + \int_0^T 1 dt \right) && \text{Sæt konstanter udenfor} \\ &= \frac{1}{T} \cdot a_7 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0 + T) && \text{Udregn integraler} \\ &= a_7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 && \text{Reducér} \\ &= \frac{1}{2} \cdot a_7 \end{aligned}$$

Derfor er $\text{Led7}_{\text{middel}} = \frac{1}{2} \cdot a_7$.

Ser vi nu på leddene med b -koefficienterne (amplituderne), så går meget lettere!

Vi ser på det første af disse led:

$$b_1 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Vi anvender en anden af de logaritmiske formler:

$$\cos(A) \cdot \sin(B) = \frac{1}{2} \cdot \sin(A + B) + \frac{1}{2} \cdot \sin(A - B)$$

dvs. der må gælde, at

$$b_1 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) = b_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sin(7\omega \cdot t + \omega \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(7\omega \cdot t - \omega \cdot t) \right)$$

Anvend logaritmisk formel

$$b_1 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) = b_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sin(8\omega \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(6\omega \cdot t) \right)$$

Reducér i parenteser

$$b_1 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot (\sin(8\omega \cdot t) + \sin(6\omega \cdot t))$$

Sæt $\frac{1}{2}$ udenfor

dvs. vi får altså denne gang blot to sinusfunktioner med en periode på hhv. 8 og 6 – altså er middelværdien af hver af disse nul, og derfor en middelværdien af summen jo også nul!

På samme måde kan vi vise, at middelværdien af alle b -amplitude-led bliver nul! Denne gang går nemlig ikke galt i led nr. 7:

$$b_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(7\omega \cdot t)$$

Fordi, hvad sker der her? Når vi omskriver får vi:

$$b_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(7\omega \cdot t) = b_7 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sin(7\omega \cdot t + 7\omega \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(7\omega \cdot t - 7\omega \cdot t) \right)$$

$$b_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(7\omega \cdot t) = b_7 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sin(14\omega \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(0) \right)$$

$$b_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(7\omega \cdot t) = b_7 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sin(14\omega \cdot t) + 0 \right)$$

Derfor har vi kun $\sin(14\omega \cdot t)$ tilbage, og middelværdien af $\sin(14\omega \cdot t)$ er jo nul (som ovenfor), og derfor er middelværdien af $b_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$ også nul! Dvs. ingen af b -leddene overlever!

Vi ser at Fouriers trick har virket ligesom en si – når vi ganger med $\cos(7\omega \cdot t)$ og bestemmer middelværdien, så forsvinder alle led undtagen $a_7 \cdot \cos(7\omega \cdot t) \cdot \cos(7\omega \cdot t)$, som har middelværdien $\frac{1}{2} \cdot a_7$. Altså er den samlede middelværdi af $\cos(7\omega \cdot t) \cdot s(t)$ blot $\frac{1}{2} \cdot a_7$:

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \cos(7\omega \cdot t) \cdot s(t) dt = \frac{1}{2} \cdot a_7$$

og dermed har vi bestemt endnu en af koefficienterne:

$$a_7 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \cos(7\omega \cdot t) dt$$

Havde vi valgt, at gange igennem med en anden cosinusfunktion fra start fx $\cos(n \cdot \omega \cdot t)$, hvor n er et helt tal, så ville vi på samme måde se at kun det n 'te led ville overleve, og dermed ville den n 'te koefficient blive:

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) dt, \text{ hvor } n \text{ er et helt tal}$$

Således har vi bestemt alle a -amplituderne!

På samme måde kan man vise, at når man fra start i stedet ganger igennem med $\sin(7\omega \cdot t)$, så forsvinder alle b -leddene undtagen det 7. led, hvor man får

$$\frac{1}{2} \cdot b_7 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \sin(7\omega \cdot t) \cdot s(t) dt$$

og dermed ved at gange med 2, at

$$b_7 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \sin(7\omega \cdot t) dt$$

På samme måde som ovenfor betyder det jo så, at alle b -amplituderne kan skrives på formen:

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) dt, \text{ hvor } n \text{ er et helt tal}$$

Alt i alt, har vi nu vist, hvordan man kan bestemme amplituderne, når man kender $s(t)$:

$$s(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + a_2 \cdot \cos(2\omega \cdot t) + b_2 \cdot \sin(2\omega \cdot t) + \dots + \dots + \dots$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)$$

hvor vi har samlet a -led og b -led ved at anvende et sumtegn i notationen.

Her er amplituderne nemlig bestemt ved:

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) dt$$

hvor n er et helt tal.

Dvs. ud fra lydtrykket som funktion af tiden kan vi altså beregne amplituderne i hvert af de led, der repræsenterer grundtonen og dennes ovetoner – altså kan vi genskabe grundtonen og dens overtoner ud fra den sammensatte lyd!

Opgave 57

Gennemfør argumentationen for b -amplituderne, idet du fra start ganger igennem med $\sin(7\omega \cdot t)$ på begge sider af lighedstegnet i udtrykket for $s(t)$:

$$s(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + a_2 \cdot \cos(2\omega \cdot t) + b_2 \cdot \sin(2\omega \cdot t) + \dots + \dots + \dots$$

og derefter beregner middelværdien for $\sin(7\omega \cdot t) \cdot s(t)$ ved at beregne middelværdien for hvert af leddene på højresiden, ligesom vi gjorde ovenfor.

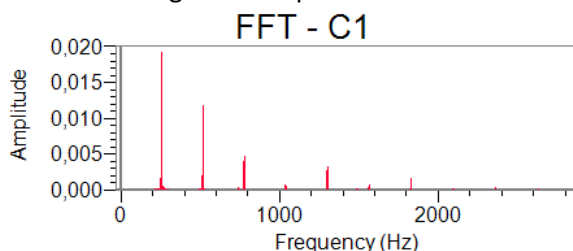
Så vil du i alle a -led få en sinus ganget med en cosinus, og disse led kan omskrives ved hjælp af en den logaritmiske formel: $\sin(A) \cdot \cos(B) = \frac{1}{2} \cdot \sin(A+B) + \frac{1}{2} \cdot \sin(A-B)$, hvorved du får en sum af to sinusfunktioner, hvis middelværdier hver for sig vil være nul, dvs. alle a -led vil forsvinde.

I alle b -led vil du få to sinusfunktioner ganget sammen, og disse led kan således omskrives ved hjælp af den logaritmiske formel: $\sin(A) \cdot \sin(B) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(A+B) - \frac{1}{2} \cdot \cos(A-B)$, hvorved du får en sum af to cosinusfunktioner, hvis middelværdier hver for sig vil være nul – undtagen i det 7. led!

Hermed har vi argumenteret for den del af sætningen om Fourierrækker, der siger, at såfremt vi ved, en funktion kan skrives som en sum af harmoniske svingninger, så kan Fourierrækken s koefficienter bestemmes som angivet i sætningen.

Eksempel FFT

Vi vender tilbage til FFT-spektret af tonen C.



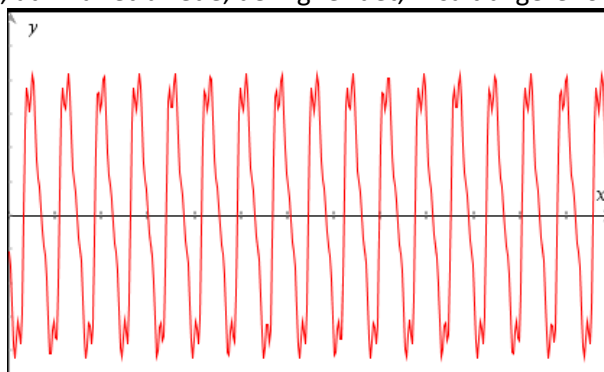
Her ser vi, hvordan et computerprogram ved Fourier Analyse genskaber tonens bestanddele – først grundtonen og derefter alle dens overtoner, hvor man kan aflæse hver tones amplitude og frekvens. Grundtonens frekvens er 261,2 Hz, og vi kan aflæse grundtonens amplituden til 0,019, mens overtonernes amplituder er:

1. overtone	2. overtone	3. overtone	4. overtone	5. overtone	6. overtone
0,012	0,005	0,001	0,003	0,001	0,002

Vi kan således opbygge den lydfunktion, der beskriver denne tone:

$$s(t) = 0,019 \cdot \sin(2\pi \cdot 261,2 \cdot t) + 0,005 \cdot \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 261,2 \cdot t) + 0,001 \cdot \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 261,2 \cdot t) + \dots$$

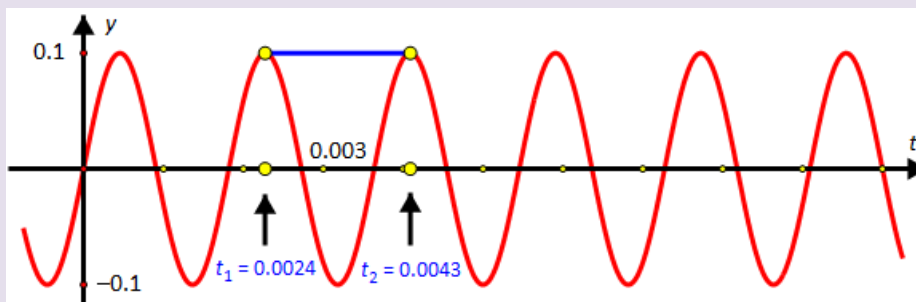
og vi kan tegne grafen og se, at vi får et billede, der ligner det, vi så tidligere for tonen C1:



Opgave 57 Nedenfor ses lydbølgen for en bestemt tone.

- Aflæs amplituden og perioden.
- Bestem vinkelhastigheden og grundfrekvensen.
- Opstil et udtryk for den lydfunktion, der har lydbølgen som graf.

d) Benyt klavertangent-oversigten du kan finde på bogens **website** til at be-stemme hvilken (ren) tone, der er tale om.



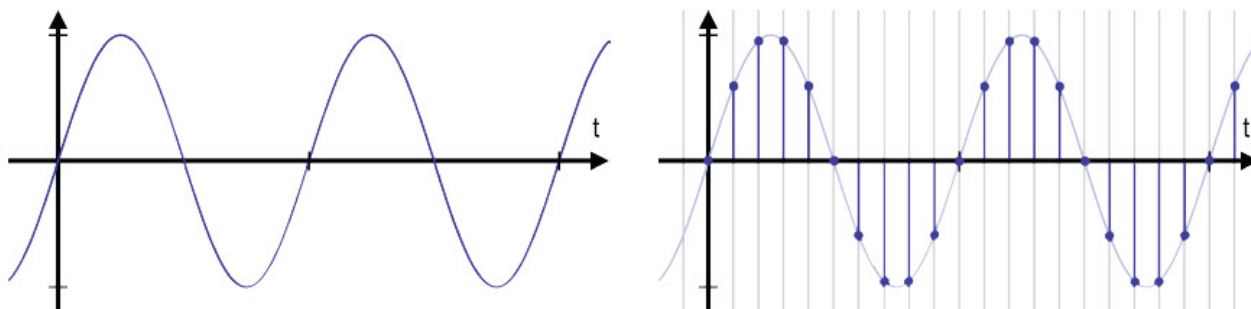
Lydbilledet i øvelsen ovenfor er naturligvis meget forenklet, men det giver et indtryk af, at man ud fra få informationer om et givet lydbillede kan opstille et udtryk for den funktion, som beskriver lydbølgen.

10.7 Sampling – oversættelse mellem analog og digital

Lyd bliver "født" som svingninger. Stemmebåndets eller klaverstrengens svingninger forplanter sig gennem luften og rammer måske efter kort tid øret hos en tilhører, og udløser her svingninger i vedkommendes trommehinder. Det er forskellige medier, der bringes i svingninger, men det er grundlæggende samme signal, som vi matematisk repræsenterer med kontinuerte funktioner, sammensat af sinus og cosinus funktioner. Vi taler om analoge repræsentationer eller gengivelser af lyden. En klassisk grammofonplade er ligeså en analog repræsentation, idet svingningsmønstret er skåret ind i grammofonens riller – og når en nål bevæger sig gennem rillerne sættes den i svingninger, som via elektriske signaler, der også er en analog repræsentation af svingningsmønstret, sætter en højtalers membran i svingninger.

Men i vore dage er i hele dette forløb indskudt oversættelser mellem analog og digital repræsentation af lyden. Når lyd gemmes, hentes eller sendes via nettet, så sker det i digital form, dvs i form af en lang række talværdier. Disse er sagens natur "diskrete" – selv om der er mange talværdier er der jo ikke uendeligt mange! Når et analogt signal skal omsættes til et digitalt signal, foregår det ved *sampling*. Man måler med regelmæssige (selvvalgte) tidsintervaller signalværdier fra det analoge kontinuerte signal, og resultatet heraf er således blot en endelig række af tal – hvis man har taget n samples, så vil talrækken indeholde n værdier, hvor n er et helt tal. Når man har defineret sit samplingsinterval T_s , så indhenter samplingsprocessen blot en signalværdi svarende til tidspunkterne $T_s, 2T_s, 3T_s, 4T_s, \dots$

Den signalværdi man får til tidspunktet T_s skal således repræsentere signalværdien for hele tidsintervallet $[T_s; 2T_s]$, mens signalværdien indhentet til tidspunktet $2T_s$ repræsenterer hele tidsintervallet $[2T_s; 3T_s]$, osv. Vi får så i stedet for en kontinuert glat harmonisk kurve en række punkter, som hver især ligger på den oprindelige kurve, men med intervaller i mellem, hvor der ikke er noget signal:



Figuren viser samplingsprocessen af en kontinuert glat sinuskurve.

Det centrale spørgsmål er nu: I hvilken udstrækning kan man rekonstruere det oprindelige analoge signal ud fra en række samples? For at rekonstruere et kontinuert signal ud fra de endeligt mange samples, skal man på en eller anden måde "gætte", hvilken værdi signalet sandsynligvis skulle antage i tidsrummene i mellem vores samples. Ideelt set vil man jo gerne have en algoritme, der "gætter rigtigt" – det vil sige, at det kontinuerte signal, vi får ud, gerne skulle være meget tæt på det oprindelige kontinuerte signal.

Der er umiddelbart ingen garanti for at det rekonstruerede kontinuerte signal er tilnærmelsesvist lig med det oprindelige analoge signal. Men i 1948 fremkom Claude Shannon (1916-2001) med en teori for, hvordan man kan genskabe et signal, der kommer særdeles tæt på det oprindelige signal – ja faktisk i teorien genskaber signalet 100% korrekt! *Shannons Sample Theorem* siger populært sagt, at det originale kontinuerte lydsignal kan rekonstrueres nøjagtigt ud fra sine samples, når den højeste frekvens f_{\max} , der findes i

lydsignalet's Fourierrække, er mindre end den halve samplingsfrekvens, dvs. $f_{\max} < \frac{1}{2} \cdot f_s$, hvor $f_s = \frac{1}{T_s}$.

Denne halve samplingsfrekvens kaldes også for *Nyquist-frekvensen*, til ære for Harry Nyquist, der arbejdede sammen med Shannon på Bell Labs, forskningsafdelingen i det amerikanske telefonselskab American Telephone & Telegraph Company (AT & T).

Dette er et meget overraskende resultat: Ud fra endeligt mange punkter kan man altså ikke alene skabe noget der tilnærmelsesvist er lig det oprindelige, men som er 100% identisk med det. Shannons og Nyquists arbejde var med til at grundlægge en helt ny disciplin i grænseområdet mellem matematik, fysik og datalogi, *Digital Signal Processing*. Vi vil ikke her gå længere ind i denne verden.

10.8 SRP

Emnerne i dette kapitel egner sig fortrinligt som emner til en SRP. Svingningsfænomener findes i mange og vidt forskellige udgaver:

Lyd - Harmoniske svingninger og digital kommunikation

Matematisk analyse og eksperimentel undersøgelse af lydbilleder.

Evt kan der lægges et fokus på oversættelse mellem analoge og digitale signaler.

Tidevandets Musik

I 1800 tallet gennemførte Kelvin som leder af The Tidal Committee en omfattende undersøgelse af et empirisk materiale fra havnene i de mange engelske besiddelser kloden rundt. Målet var ved hjælp af Fourier-analyse at kunne nå frem til en klar beskrivelse af hvilke frekvenser og amplituder for bølgebevægelser, der herskede i havnene, og ud fra dette være i stand til at forudsige tidevandsbevægelserne. Materialet i dette kapitel kan suppleres med materialerne i HEM B, kapitel 7, Den indledende fortælling og i HEM 3, kapitel 1, Den indledende fortælling.