ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse EGMONT

Projekt 0.7 How Long Is the Coast of Britain

Introduktion

Dette projekt drejer sig om at læse og forstå et centralt kildeskrift på engelsk af en af det 20. århundredes største matematikere, Benoit Mandelbrot (1924-2010). Artiklen er fra 1967, den er ganske kort og indeholder matematik på et niveau, som elever i gymnasiet godt kan sætte sig ind i. Men den fik alligevel en meget stor betydning for det fornyede studium af fraktaler, der voksede frem i 1970'erne, og som dels har gjort dette til en betydelig del af den moderne matematik, og som har givet fornyet indsigt i mange klassiske problemer. Det skyldtes, at den kom lige på det rette tidspunkt, nemlig hvor matematikere og siden alle andre fik adgang til computere som et værktøj i udforskningen af processer, hvor bestemte procedurer gentages igen og igen – det som vi i matematik kalder for iterationer. Man kan naturligvis ikke gentage en proces uendeligt mange gange, men på en computer kan man foretage så mange iterationer, at man kan få en klar fornemmelse af, hvad der sker "på den yderste dag". Naturligvis skal man her som i andre dele af matematikken bevise sine resultater, men det gav en ny "dimension" til matematikken, at man nu kunne eksperimentere fx med meget komplicerede geometriske figurer.

Projektets overskrift er titlen på Mandelbrots artikel. Det kan måske umiddelbart forekomme som et mærkeligt spørgsmål – man kan vel bare gå ud og måle, hvor lang den er. Men det er faktisk ikke så enkelt – du kan få en fornemmelse af problemet ved at se denne korte YouTube film: What Is The Coastline Paradox? - YouTube.
Filmen handler om Australiens kystlinje, og det understreger blot, at det ikke har noget med England at gøre. Mandelbrot var ikke den første der stillede spørgsmålet. I artiklen krediterer han den engelske matematiker, fysiker, meteorolog, pacifist og meget mere, Lewis Frey Richardson (1881-1953) for at være den første, der stillede skarpt på problemet – og som samtidig gav et bud på svaret.

Richardson forsøgte at anvende sine matematiske færdigheder til at fremme modstand mod krig som middel til at løse konflikter. Det havde han, som vi ved, ikke stor succes med – men en del af hans artikler og matematiske bidrag blev stående. Og han betragtes i dag som en af grundlæggerne af den videnskabelige analyse af konflikter mellem stater og af årsagerne til krig, som idag har en betydelig plads i alle nationer. Han indsamlede fx meget store datamaterialer om krige i 1800-tallet, og det er en af hans mere specielle modeller, det her handler om:

Richardson besluttede nemlig at søge efter en sammenhæng mellem sandsynligheden for, at to lande går i krig og længden af deres fælles grænse. Mens han indsamlede data, fandt han imidlertid, at der var betydelig variation i de forskellige offentliggjorte længder af internationale grænser. For eksempel blev grænsen mellem Spanien og Portugal angivet så forskelligt som 987 eller 1214 km, og grænsen mellem Holland og Belgien så forskelliugt som 380 eller 449 km. Hvordan kan det være? Det er det første spørgsmål, du skal gøre dig fortrolig med.

De fleste kystlinjer er fraktaler, og det er det næste emne. De geometriske fraktaler giver anledning til at vi giver en ny og mere "rummeligt" definition af dimensionsbegrebet. Et ret linjestykke, der bøjes, så det danner en cirkel, har en endelig længde, som vi kan regne ud med en formel. Men en figur som "Kochs snefnug" og et væld af andre geometriske fraktaler har en uendelig lang omkreds, selv om de kun omslutter et beskedent endeligt areal. Det begrunder, at sådanne figurer ikke har samme dimension som en cirkel-periferi. De fylder simpelthen mere – men ikke så meget som en cirkelskive. Vi lærer at beregne disse figurers dimensioner.

Men hvad så med Englands eller Australiens eller andre landes kystlinjer. De er måske ikke lige så regelmæssigt opbygget, men er alligevel så krøllede, at de må have en skæv dimension. Og hvor lang bliver kystlinjen? Mon ikke den bliver uendelig lang?

Projektet anvender primært følgende materialer:
- Mandelbrots artikel: *How Long is the Coast of Britain? Statistical self-Similarity and Fractal Dimension.*
artiklen kan hentes ***her.***
- Bjørn Grøn, Bodil Bruun og Olav Lyndrup: *Hvad er matematik*? 2, kapitel 0, afsnit 2. (omtales: HEM2)

ISBN 9788770668699

1. Første erfaringer med længder og dimensioner af krøllede figurer.

Læs førte side (s. 18) i afsnittet i HEM2, og svar på følgende spørgsmål:

Øvelse 1.
Mandelbrot publicerede i 1967 en artikel med titlen *How long is the coast of Britain?*
a) Hvad var Mandelbrots pointe med det spørgsmål?
b) Han indførte begrebet *selv-similær*. Hvad betyder det?

Øvelse 2
a) På side 18 er gengivet to figurer forestillende England og Skotland. Forklar hvad tegningerne illustrerer, og hvordan vi skal forstå billedteksterne. Hvad menes med "målestok"?
b) De to illustrationer i bogen anvendte målestokkene 50 km og 100 km. Tegningen til venstre illustrerer det samme, men nu med en målestok på 200 km. Hvor lang er kysten med denne ret grove opmåling.?

Øvelse 3
a) Udfyld dette skema (*vi anvender 10-tals-logaritmen, men man kunne lige så godt anvende den naturlige logaritme – de endelige resultater ville være de samme, da de to logaritmer er proportionale, som vist i lærebogen. 10-tals-logaritmens værdier er lettere at forholde sig til, derfor*)

måleenhed (s)	**antal enheder**	**samlede opmålte kystlinje ($L(s)$)**	**Log(s)**	**Log($L(s)$)**
200 km				
100 km				
50 km				

b) Udfør potensregression på den uafhængige variabel s og den afhængige $L(s)$, og tegn grafen af potensfunktionen. (Du skal få en forskrift, der ligner denne: $k(s)=10034\cdot x^{-0.27216}$, hvor k står for "kystlinjen")

c) Giv en fortolkning af den konstante faktor, 10034. Begrund dette ud fra din viden om potensfunktioner og deres grafer.

d) Udfør lineær regression på Log(s) og Log($L(s)$), og tegn grafen for den lineære funktion.
(Du skal få en forskrift, der ligner denne $l(x)=-0.2722\cdot x+4.001$)

e) Giv en fortolkning af konstantleddet 4.001 ud fra din viden om logaritmer.

f) Hældningskoefficienten $a=-0.2722$ vil vi nu skrive på formen $a=1-D$, og tolke tallet $D=1-a$ som *dimensionen af den krøllede linje!* Bemærk, at da hældningskoefficienten er et negativt tal, bliver dimensionen større end 1. Hvad er dimensionen af Englands kystlinje?
Denne tolkning, der pludselig fik en skæv dimension på banen, vil vi give en forklaring på i det følgende.

Læg mærke til at tallet a er det samme som eksponenten i potensfunktionen. Og da dimensionen $D=1-a$, vil dimensionen åbenbart optræde som eksponent i en potensfunktion. Det er faktisk det vi udnytter når vi udvider potensbegrebet nedenfor

Øvelse 4.
Se filmen omtalt i introduktionen: [What Is The Coastline Paradox? - YouTube] og svar på dette spørgsmål. Illustrer det med eksempler fra filmen. Hvad har det med de foregående øvelser at gøre?

Øvelse 5.

a) Læs s. 1 og s. 2 af Mandelbrots artikel ned til omtalen af Sydafrikas kystlinje, og giv et referat af dette.

b) I artiklen gengiver Mandelbrot, på grundlag af Richardsons data, grafer af samme type som i øvelse 3d.
En anden artikel, hentet fra et kursus på Vanderbilt universitetet, har regnet på Richardsons tal og fundet, hvad du ser til højre. Hvordan vil du selv udregne hældningskoefficienterne ud fra graferne? Kontroller nogle af tallene.

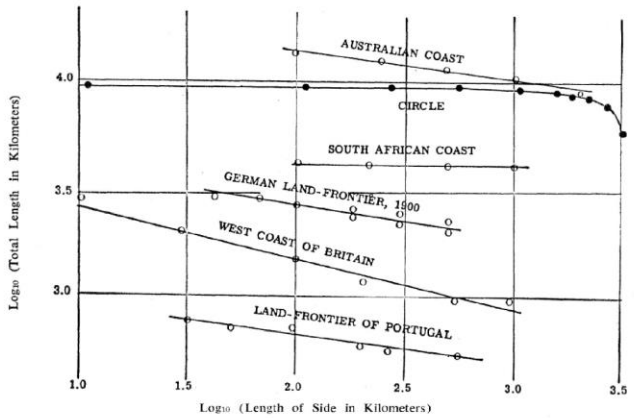
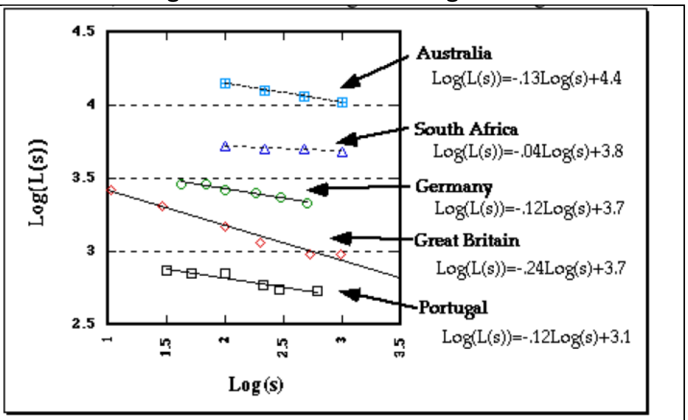


Fig. 1. Richardson's data concerning measurements of geographical curves by way of polygons which have equal sides and have their corners on the curve. For the circle, the total length tends to a limit as the side goes to zero. In all other cases, it increases as the side becomes shorter, the slope of the doubly logarithmic graph being in absolute value equal to D–1. (Reproduced from 2, Fig. 17, by permission.)



kilde: https://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/Fractals.html

c) I øvelse 3 regnede du selv på forskriften for længden af Englands kystlinje som funktion af længden af den målestok, der anvendes. Sammenlign tallene og kommenter.

(Bemærk: I billedteksten og i artiklen møder vi udtrykket $D-1$ for hældningen. Dette forklares nærmere i afsnit 2 nedenfor)

Øvelse 6.

Hent et kort over Samsø hvor der er angivet en målestok på kortet. Du kan finde et kort på nettet, eller du kan hente et geodætisk kort ***her.***
Print kortet ud i mindst A4-format.
a) Udfør nu selv beregninger svarende til opmålingen af England. Du skal bruge en passer, gerne med spids i begge ben. Lad benene spænde over målestokken på 5 km. Begynd et sted på kystlinjen, og lad passeren afsætte 5 km af gangen hele vejen rundt. Passerens ben / nål skal hver gang sættes ned i kystlinjen. Når du har været hele vejen rundt, så tælles antallet af måleenheder, og du udfylder følgende tabel:

måleenhed (s)	**antal enheder**	**samlede opmålte kystlinje (L)**
5 km		
4 km		
3 km		
2 km		

Vi ser, at L afhænger af s, eller sagt med andre ord: *L er en funktion af s*, som vi naturligvis betegner $L(s)$.

b) Udregn nu logaritmen til måleenheden, s og logaritmen til den samlede længde, $L(s)$.

c) Afsæt dernæst i et almindeligt koordinatsystem $\log(L(s))$ som funktion af $\log(s)$. Beskriv hvad du ser.

d) Udfør lineær regression på de to variable $\log(L(s))$ og $\log(s)$. Hældningskoefficienten a vil vi nu skrive på formen $a=1-D$, og tolke tallet $D=1-a$ som *dimensionen af den krøllede linje!* Bemærk, at da hældningskoefficienten er et negativt tal, bliver dimensionen større end 1. Hvad er dimensionen af Samsøs kystlinje?

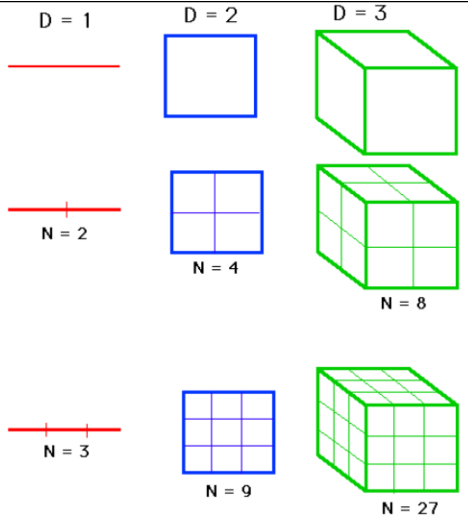
ISBN 9788770668699

2. Udvidelse af dimensionsbegrebet

Vi tager udgangspunkt i det kendte dimensionsbegreb.

Øvelse 7.

a) Læs s. 19-20 i HEM2, og redegør for ligningerne nederst s. 20. Du kan måske få hjælp i din argumentation af følgende illustrationer:



b) Hvis s angiver sidelængden og N angiver antallet af måleenheder med denne sidelængde, så gælder der indlysende nok for almindelige glatte figurer, som en linje, et kvadrat, en terning, at $N \cdot s^i = \text{konstant}$, hvor i er dimensionen 1, 2 eller 3.

Vis, at dette kan omskrives til:

$$N = \alpha \cdot s^{-i}$$

hvor α er en konstant.

Dimensionsbegrebet udvides nu ved at fastsætte, at *hvis vi har en figur, hvor man kan opstille en tilsvarende proportionalitet mellem antallet af måleenheder, N og længden af / arealet af / volumenet af den anvendte måleenhed (eller skaleringsfaktor) s:*

$$N = \alpha \cdot s^{-D}$$

så kaldes tallet D for dimensionen af figuren

Ser vi på et enhedsinterval, enhedskvadrat osv, så er $\alpha = 1$, og dermed: $N = s^{-D}$

Øvelse 8

a) Vis, at $D = -\dfrac{\log(N)}{\log(s)}$

b) I formlen her indgår et minus. Hvis dimensionen skal være en generalisering af det vi kender, skal D være positiv. Hvordan hænger det sammen?

Øvelse 9

Vi anvendte ovenfor i øvelserne, at når vi skal give et estimat for længden, L af en kurve, så udregnede vi tallet:

$$N \cdot s$$

a) Vis, at sammenhængen mellem L og s kan udtrykkes med formlen:

$$L(s) = \alpha \cdot s^{-D} \cdot s = \alpha \cdot s^{1-D}$$

α er en konstant, der ovenfor udsprang af den sande værdi af henh. længde, areal og volumen. Den sande værdi af en længde afhænger af, om vi måler i km, i sømil, i svenske mil, i yards osv. Ved i stedet at vælge *den sande værdi af længden* som vores grundlæggende enhed, så er formlen reduceret til:

$$L(s) = s^{1-D}$$

b) Vis, at vi heraf kan udlede formelen:

$$1 - D = \frac{\log(L(s))}{\log(s)}$$

c) Argumenter for, at formlen giver, at tallet D er større end 1.

(Hint*: Da* s *er et lille tal, under 1, så vil logaritmen være negativ*)

Resultaterne i øvelse giver altså forklaringen på den sammenhæng, vi postulerede i afsnit 1, mellem **dimensionen** af af den krøllede kystlinje og **hældningskoefficienten** på de rette linjer, der fremkommer, når vi laver lineær regression på sammenhængen mellem logaritmen af den samlede længde målt med en given enhed, og logaritmen af denne måleenhed, nemlig $a = 1 - D$

d) Vend tilbage til øvelse 5 og kontroller, at der er overensstemmelse mellem ovenstående og artiklens fremstilling.

e) På den grafiske illustration med de forskellige kystlinjer, som Mandelbrot har lånt fra Richardson, har denne til sammenligning medtaget målinger på en abstrakt figur, nemlig en cirkelperiferi. Hvad fortæller denne graf om *længden* af cirkelperiferien, når vi måler med stadig mindre måleenhed? Hvad er *dimensionen* af denne kurve?

Øvelse 10

a) Læs videre i Mandelbrots artikel fra side 2, 1. spalte, afsnittet: ”*Richardsons empirical finding*...” frem til 2. spalte hvor afsnittet med teksten: ”*This last property of the quantity D means* ...” begynder.

b) Sammenlign indholdet i afsnittet med indholdet og definitionen i øvelse 7.

3. Dimensionen af abstrakte fraktale figurer

Abstrakte fraktale figurer fremkommer ofte gennem *en iterativ proces*, hvor den samme procedure anvendes igen og igen. Den måske ældste kendte fraktale figur er den, vi kalder *Cantors støvmængde*, der i sin grundstruktur er kendt helt tilbage fra den ægyptiske civilisation. Den undersøges særskilt i projekt 0.6, men kan her tjene som eksempel på, hvad en sådan iterativ proces er:

Vi starter med et enhedsinterval, og fjerne nu den midterste tredjedel.

Tilbage er to intervaller: $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ og $\left[\frac{2}{3};1\right]$. Fra hvert af disse fjerner vi den midterste tredjedel.

Tilbage er 4 intervaller: $\left[0;\frac{1}{9}\right]$ og $\left[\frac{2}{9};\frac{1}{3}\right]$ samt $\left[\frac{2}{3};\frac{7}{9}\right]$ og $\left[\frac{8}{9};1\right]$. Fra hvert af disse fjerner vi nu ....

I hvert trin bliver antallet *N* skaleret *op* med en faktor 2. Og i hvert trin bliver ”måleenheden” / intervallængden skaleret *ned* en faktor 3, dvs skaleringsfaktoren er $\frac{1}{3}$.

Dimensionen af Cantors støvmængde udregnes derfor ved brug af formlen i øvelse 8:

$$D = -\frac{\log(N)}{\log(s)} \qquad (*)$$

N og *s* ændrer sig i hver iteration, så efter den k'te iteration er $N = 2^k$ og $s = \left(\frac{1}{3}\right)^k$. Ved at indsætte får vi:

$$D = -\frac{\log(N)}{\log(s)} = -\frac{\log\left(2^k\right)}{\log\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)} = -\frac{k\cdot\log(2)}{k\cdot\log\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0.63$$

Øvelse 11.

Gør omhyggeligt rede for hvert trin i omskrivningerne.

Vi bemærker at formlen nu alene indeholder skaleringsfaktorerne. Dette har ikke noget med Cantors støvmængde at gøre, men må fremstå sådan i enhver iterationsproces. Derfor vil vi tolke formlen (*) sådan, at *N og* s kan stå for skaleringsfaktorerne, og ikke kun for det samlede antal.

Definition: Dimensionen af figurer, der fremkommer gennem en iterationsproces.
Hvis en figur fremkommer som resultat af en iterationsproces, hvor der i hvert trin sker det, at *den grundlæggende geometriske enhed* skaleres ned med faktoren k_s, og *antallet af disse enheder* skaleres op med faktoren k_N, så defineres dimensionen af figuren som tallet:

$$D = \frac{\log(k_N)}{\log(k_s)}$$

ISBN 9788770668699

Overvej selv, hvordan denne beskrivelse også inkluderer det traditionelle dimensionsbegreb, hvor fx en linje har dimension 1.

En fraktal defineres faktisk ofte som en figur med en dimension, der ikke er et helt tal.

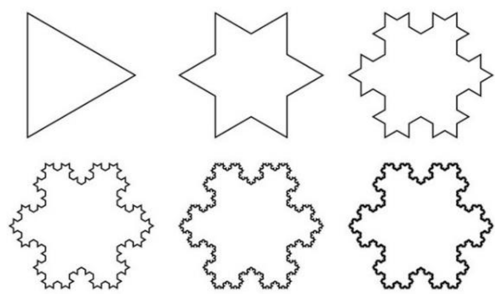
I den videre tekst omtaler Mandelbrot sådan en passant *'Kochs continuous non-differential curve'* , som han vil lave nogle variationer over. For at få det fulde udbytte af dette, vil vi gøre os bekendte og fortrolige med Kochs curve, som idag er mere kendt i form af *'Kochs snefnug'*.

3.1 Undersøgelse af Kochs snefnug

Den iterationsproces, der ligger til grund for Kochs snefnug, blev præsenteret i en artikel af den svenske matematiker Helge von Koch (1870-1924) i en artikel fra 1904 med titlen: *On a continuous curve without tangents, constructible from elementary geometry*. Som titlen siger, var Kochs ærinde ikke så meget studiet af fraktale figurer. Hans arbejde var en del af en trend dengang, nemlig at udfordre vores forestillinger om differentiabilitet gennem konstruktion af de særeste kurver. Denne kurve er altså kontinuert i alle punkter, men ikke differentiabel noget sted!
Men den udfordrer også vores geometriske forestillinger. Kochs snefnug konstrueres som alle fraktale figurer i en *iterationsproces*.

Udgangspunktet er en ligesidet trekant med sidelængde 1, og de første iterationer ser du her.
Iterationsprocessen foregår altså således:

1. Ethvert linjestykke i trekanten tredeles.
2. På det linjestykke der udgør den midterste tredjedel konstrueres en ligesidet trekant.
3. Linjestykket der udgør den midterste tredjedel fjernes og erstattes således af de to resterende sider i den ligesidede trekant.



Du kan her (https://da.wikipedia.org/wiki/Fil:KochSnowGif16_800x500_2.gif) finde en animation der viser, hvordan den ene figur afløses af den følgende.

Processen fortsættes i det uendelige. Det er klart, at man ikke kan tegne den endelige udgave af Kochs Snefnug. Men man kan vise, at det faktisk er en sammenhængende figur, der er 'grænse-figur', dvs. den figur man ender med efter uendeligt mange tredelinger. Gør dig selv fortrolig med konstruktionen ved at løse følgende:

Øvelse 12. Dimensionen af Kocks snefnug

Vi betragter en af siderne i trekanten, og undersøger, hvad der sker med denne i iterationsprocessen. Første trin ser du på figuren her:
Vi har delt et linjestykke i tre lige store dele, anvendt det midterste som grundlinje i en ny ligesidet trekant, og endelig fjernet denne grundlinje.
Linjestykkerne i denne første iterationsfigur er alle lige lange.

a) Tegn selv på et papir hvordan den næste iteration ser ud.
b) Hvad er skaleringsfaktoren k_s for linjestykkerne?
c) Hvad er skaleringsfaktoren k_N for antallet af linjestykker?
d) Bestem dimensionen af den fraktale figur, der er resultatet af den uendelige iterative proces.
(Du skal få ca 1,26).
Vi har blot set på den ene af siderne i den ligesidede trekant, der fører til Kochs snefnug, men det er selvfølgelig samme proces med de andre, så vi har hermed bestemt at dimensionen af Kochs snefnug er 1.26.

Øvelse 13. Areal og omkreds af Kochs snefnug

Vi vil nu forsøge at beregne areal og omkreds af Kochs snefnug.

ISBN 9788770668699

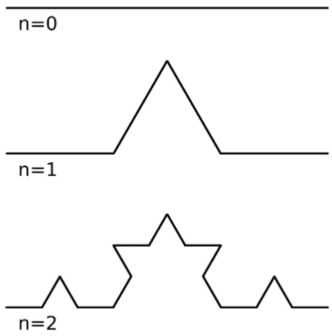
På hvert trin har alle linjestykker samme længde. Vi ønsker at finde længden af et sådant linjestykke som funktion af antallet af trin.

Lad os sige, længden af startlinjen er 1, så de enkelte stykker i 1. iteration har længde $\frac{1}{3}$. Så er længden af den knækkede linje i 1. iteration lig med $\frac{4}{3}$

a) Hvis længden havde været *a* i stedet for 1, hvad var så længden af den knækkede linje?

b) Hvis længden af den knækkede linje er *b*, hvad bliver så længden linjen med de mange knæk i 2. iteration?

c) Hvis startlinjen har længde 1, hvad er så formlen for længden af linjen i 2. trin med de mange knæk? Hvad er formlen for længden af linjen i 3. iteration?



d) Hvad er længden af *linjen* blevet til efter at vi har gentaget denne proces 10 gange? n gange?

e) Hvor lang er den samlede *omkreds* efter 10 gange? Efter n gange?

f) Argumenter for, at **omkredsen** af den endelige grænsefigur, vi kalder for Kochs snefnug, er uendelig stor!

g) Vis, at **arealet** af den ligesidede trekant med sidelængde 1 er $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (*hint:* Bestem først højden ved at opdele trekanten og anvende Pythagoras sætning.)

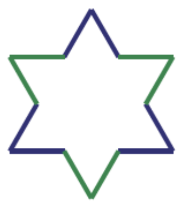
h) Når sidelængden i de ligesidede trekanter i første trin af iterationerne er på $\frac{1}{3}$, hvor stor er arealet da af en af disse trekanter? (*hint*: Alle sider skaleres ned med samme faktor 3. Hvad skaleres arealet så ned med?)

i) Hvor mange nye små trekanter er figuren øget med?

j) Vis, at det samlede areal af figuren efter 1. iteration er:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

0. trin, start



1. trin

k) Sidelængderne i et givet trin er på $\frac{1}{3}$ af sidelængderne i det foregående trin. Hvor stor en brøkdel udgør arealet af en trekant i forhold til arealet af trekanterne i det foregående trin?

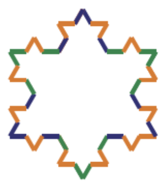
l) Argumenter for, at i trin 2 kommer der $4 \cdot 3$ nye små trekanter med

m) Vis, at det samlede areal af figuren i trin nr. 2 er:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 12 \cdot \frac{1}{9^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

n) Argumenter for, at i trin 3 kommer der $4 \cdot 12$ nye små trekanter med.

o) Vis, at det samlede areal af figuren i trin nr. 3 er:



2. trin

ISBN 9788770668699

$\frac{\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+12\cdot\frac{1}{9^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+48\cdot\frac{1}{9^3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$	

Vi kan nu se mønstret i formlen der vil gives os arealet af Kochs snefnug:
I trin nr. n er formlen:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+12\cdot\frac{1}{9^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+48\cdot\frac{1}{9^3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\ldots+3\cdot4^{n-1}\cdot\frac{1}{9^n}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Dette ligner strukturen i en kvotientrække, som vi kender fra HEM1 i kapitlet om rentesregning. Her har vi også udledt en formel for summen af en kvotientrække.
Vi omskriver først så det er tydeligere at se:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+12\cdot\frac{1}{9^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+48\cdot\frac{1}{9^3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\ldots+3\cdot4^{n-1}\cdot\frac{1}{9^n}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{9}\cdot\frac{4^2}{9^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\ldots+\frac{3}{9}\cdot\frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\ldots+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{3}\cdot\left(1+\left(\frac{4}{9}\right)\cdot+\left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot+\ldots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

p) Gør omhyggeligt rede for ovenstående omskrivninger.

q) Find formlen for summen af en kvotientrække og vis, at:

$$1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}==\frac{1-(4/9)^n}{1-4/9}$$

og argumenter for, at dette udtryk går mod $\frac{9}{5}$, når $n\rightarrow\infty$

r) Vis, at **arealet** af Kocks snefnug er: $\frac{2\cdot\sqrt{3}}{5}$

.

Ovenstående udregninger viser blot en enkelt af de mange overraskende fænomener i fraktalernes verden: En figur med et meget begrænset areal kan godt have en omkreds bestående af en sammenhængende kurve, der er uendelig lang.

3.2 Variationer over et tema

I Mandelbrots artikel, hvor han omtaler Kochs snefnug, spørger han om der virkelig findes sådanne kurver med alle mulige skæve dimensioner. Ja, det gør der, og han skriver at det mest simple er blot at foretager nogle variationer netop den måde, hvorpå Kochs snefnug blev genenereret. Dette illustrerer han med en lille figur, hvor den grundlæggende geometriske figur, der skabte Kochs snefnug er ændret en smule.

Øvelse 14

a) Læs Mandelbrots artikel fra afsnittet ”*This last property of the quantity*...” til 3. spalte, afsnittet der starter med ”*Practical application of this notion*...”. Sammenlign hans fremstilling af dimensionsbegrebet med det vi har indført ovenfor.
b) Kontroller om Mandelbrots beregning af dimensionen for de eksempler han giv er i den lille illustration øverst i 2. spalte stemmer overens med den måde vi beregner den på.
c) Betragt specielt Mandelbrots eksempel 2 og eksempel 4. Tegn for begge den første iteration i hånden!

ISBN 9788770668699

Det kan være svært at se, hvordan grænsekurven kommer til at se ud. Mange af disse kurver har navne efter dem, der først beskrev dem. Den kurve, der genereres af den 4 geometriske figur kaldes for *Minkowskis pølse* – Minkowski var en af de matematikere, der arbejdede sammen med Einstein om udvikling af relativitetsteorien.

Øvelse 15
Du kan her finde en oversigt over mange af disse fraktaler: List of fractals by Hausdorff dimension - Wikipedia
(*Der er flere andre måder at definere dimensioner på. Den vi her har givet svarer til den matematikeren Hausdorff indførte*.)
Vælg nogle af figurerne og kontroller udregningen af deres dimension.
Et stykke nede i listen finder man i øvrigt Minkowskis pølse!

3.2 Selvsimilaritet.

Øvelse 16
I den sidste del af artiklen rejser Mandelbrot spørgsmålet, om matematiske fraktaler kan være en model for naturlige fænomener. Han diskuterer begrebet selv-similær og spørger om dette faktisk findes i naturen.
a) Læs denne sidste del af artiklen, fra side 2, 3. spalte, afsnittet der begynder "*Practical application of this notion*..." og resten af artiklen.
b) Hvordan vil du karakterisere denne del af artiklen ift. resten?

Mandelbrot vender tilbage til fænomener i naturen eller omverdenen, fordi det jo var selve udgangspunktet for hans overvejelser. Men naturen er jo ikke ren matematik, det vil være svært at finde præcise ligesidede trekanter og den slags. Og hvis kravet til selv-similaritet er, at den mindre del af et naturligt fænomen som en bregneplante, et sneglehus, eller en kystlinje er en præcis nedskalering af en større del, så må vi opgive. Men i alle andre sammenhænge, hvor matematik anvendes til at opstille modeller, der forestiller vi os altid, at det er tilnærmelser til virkeligheden, ikke 1-1. Mandelbrot har nogle overvejelser om en sådan statistisk tilnærmelse, men giver ikke nogle klare bud og konstaterer i slutningen, at spørgsmålet om begrebet *en selvsimilær dimension* giver mening "*is not a fully solved problem*".

Mandelbrots artikel, hvor lille den end er, fik stor betydning for den matematiske udvikling. Siden dengang er der udgivet et væld af bøger og artikler om fraktal-geometri, og der er skabt mange forskellige definitioner af dimensionsbegreber, der hver tjener sine formål. Et godt sted at orientere sig er altid den engelske udgave af wikipedia, fx denne side: Dimension - Wikipedia.

Blandt den store mængde litteratur er der en del rigtig gode bøger, der nu er frit tilgængelig i pdf fortmat. Det gælder bla. for standardværket:
Heinz-Otto Peitgen & Hartmut Jürgens & Dietmar Saupe: Fractals for the Classroom: Part One Introduction to Fractals and Chaos - PDF Drive
Det gælder også for hovedpersonen selv:
Benoit Mandelbrot: The Fractal Geometry of Nature - PDF Drive
I dette værk har Mandelbrot inkluderet en lettere omskrevet version af hans pioner-artikel, vi har studeret her.