L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 0.2 Tiltrækkende, frastødende og supertiltrækkende punkter og cykler

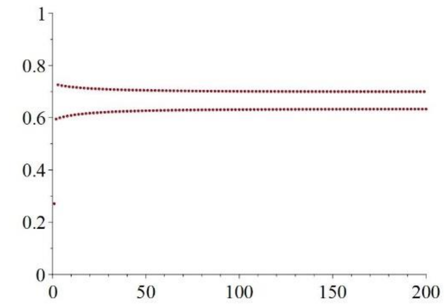
Iterationsfølger der bliver genereret af funktioner, $\{x_{n+1} = f(x_n)\}$, fremstilles grafisk på 2 forskellige måder:

- en *tidsseriegraf* af punkterne (n, x_n), hvor vi tænker på indekset *n*, som et mål for tiden der går

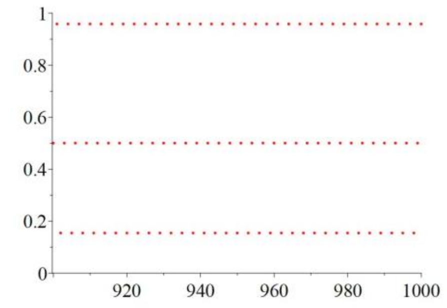
- en *cobwebgraf*, hvor man forbinder punkterne $(x_n, f(x_n))$ - der er det samme som (x_n, x_{n+1}) - på grafen for *f*, med punkterne $(f(x_n), f(x_n))$ - der er det samme som (x_{n+1}, x_{n+1}) - på grafen for $y = x$, der så igen forbindes med punkterne $(f(x_n), f(f(x_n)))$ - der er det samme som (x_{n+1}, x_{n+2}) - på grafen for *f*.

Du kan ***her*** finde en pdf-version af et Maple-dokument, hvor man kan se kommandoerne, der anvendes til konstruktion af en cobweb-graf. Og ***her*** i maple format.

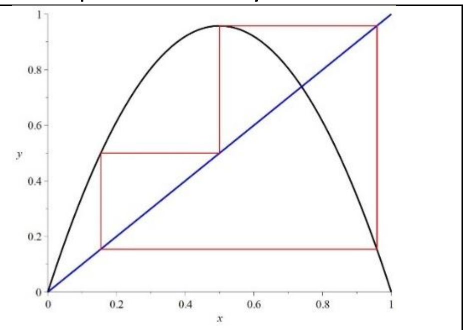
Iterationsfølger vil ofte have et forløb, hvor de enten zoomer ind mod et bestemt tal, eller zoomer ind mod fx 2, 3, 4 eller 8 forskellige tal, som følgen så cykler rundt mellem. Det kaldes for tiltrækkende punkter eller cykler.



Tidsseriegraf for 200 iterationer med $f_{301}(x) := 3.01 \cdot x \cdot (1-x)$
Der zoomes ind mod en 2-cykel



Tidsseriegraf for 100 iterationer med $f(x) = 3.831874055 \cdot x \cdot (1-x)$
Der zoomes ind mod en 3-cykel



cobwebgraf for 100 100 iterationer med $f(x) = 3.831874055 \cdot x \cdot (1-x)$
Der cykles rundt på 3 punkter

Men følgen kan også blive frastødt – hver gang den nærmer sig et bestemt tal, så skubbes de næste i følgen væk. Det kaldes frastødende punkter. Og særligt interessant bliver det, når der optræder supertiltrækkende punkter, der nærmest suger følgen ind. Det kan anvendes i algoritmer, der giver nulpunkter, fx. Newton-Raphson-algoritmen.

I projekt 0.4 er der gennemført en eksperimentel undersøgelse af betydningen af hvilken betydning *a*-tallet i funtionerne $f_a(x) := a \cdot x \cdot (1-x)$ har for forløbet af iterationerne. Her vil vi se, om vi kan give et teoretisk begrundet svar på, hvornår der optræder tiltrækkende og frastødende punkter og cykler. Hvad karakteriserer de punkter hvor cobwebgrafen lander i et punkt, eller kører i loops på et antal punkter, som fx på illustrationen ovenfor med de tre punkter.

1. Fixpunkter – tiltrækkende og frastødende

Vi erindrer definitionen af fixpunkter:

Definition 1. Fixpunkt
Givet en vilkårlig funktion *f*. Et punkt x^*, der opfylder:
$$f(x^*) = x^*$$
kaldes for et fixpunkt for funktionen.

Eksempel 1. Fixpunkter for Feigenbaumsystemet, for $0 < a \leq 4$

I Feigenbaumsystemet arbejder vi indenfor enheds-intervallet, dvs $0 \leq x \leq 1$

Lad os prøve at finde fixpunkter for $f_a(x) = a \cdot x \cdot (1-x)$). Vi skal altså finde de x, hvor der gælder:

ISBN 9788770668699

$$a \cdot x \cdot (1-x) = x, \qquad \text{gange parentesen ud:}$$
$$-a \cdot x^2 + a \cdot x = x, \qquad \text{samle leddene på højre side:}$$
$$0 = a \cdot x^2 + x - a \cdot x, \qquad \text{og sætte x udenfor parentes:}$$
$$0 = x \cdot (a \cdot x + 1 - a)$$

Nulreglen giver nu, at denne ligning er ensbetydende med:

$$x = 0 \quad \vee \quad a \cdot x + 1 - a = 0$$

som har løsningerne: $x = 0 \quad \vee \quad x = \dfrac{a-1}{a} = 1 - \dfrac{1}{a}$

For $a = 0.5$ bliver $x = 1 - \dfrac{1}{a} = -1$, så dette fixpunkt udelades. Så her er der kun ét fixpunkt, $x = 0$.

- Vis, at dette gælder for alle tal i intervallet $0 < a < 1$.
- Hvad sker der når $a = 1$?

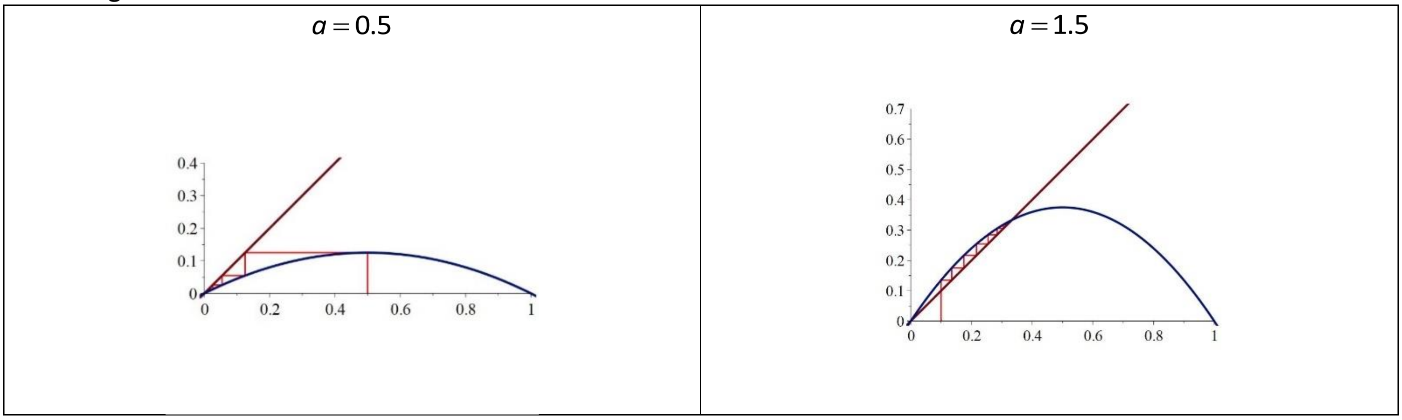
For $a = 1.5$ bliver $x = 1 - \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{3}$, så her er der to fixpunkter.

- Vis, at dette gælder for alle tal i intervallet $1 < a \leq 4$.

Øvelse 1. Eksperimentere med frastødende og tiltrækkende fixpunkter.

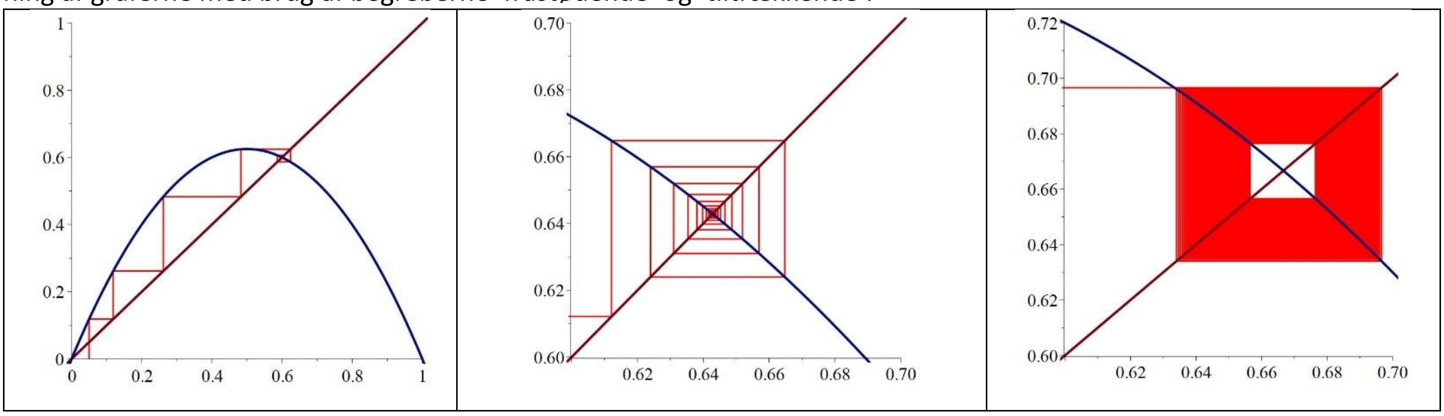
a) Fremstil en tidsseriegraf og en cobweb-graf for *a*-værdierne $a = 0.5$ og $a = 1.5$

For cobweb-graferne skal du få billeder som disse. Giv en fortolkning af graferne med brug af begreberne 'frastødende' og 'tiltrækkende'.



b) Fremstil en tidsseriegraf og en cobweb-graf for *a*-værdierne $a = 2.5$, $a = 2.8$ og $a = 3$.

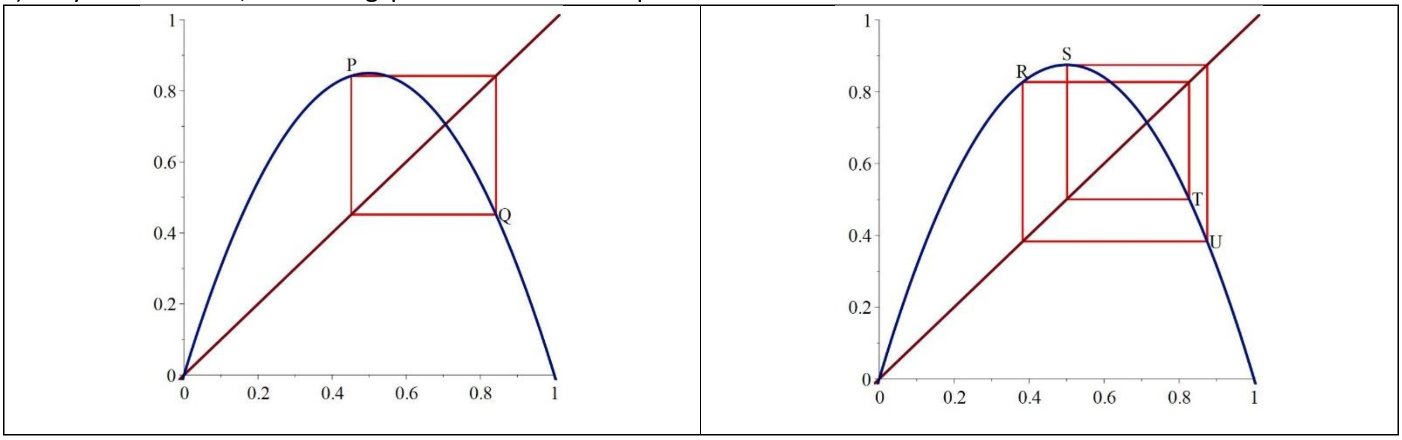
For cobweb-graferne skal du få billeder som disse. På graferne for $a = 2.8$ og $a = 3$ har vi zoomet ind. Giv en fortolkning af graferne med brug af begreberne 'frastødende' og 'tiltrækkende'.



ISBN 9788770668699

$f_{25}(x)=2.5\cdot x\cdot(1-x)$, $1-\frac{1}{a}=0.6$	$f_{28}(x)=2.8\cdot x\cdot(1-x)$, $1-\frac{1}{a}=0.642857$	$f_{3}(x)=3\cdot x\cdot(1-x)$, $1-\frac{1}{a}=\frac{2}{3}$

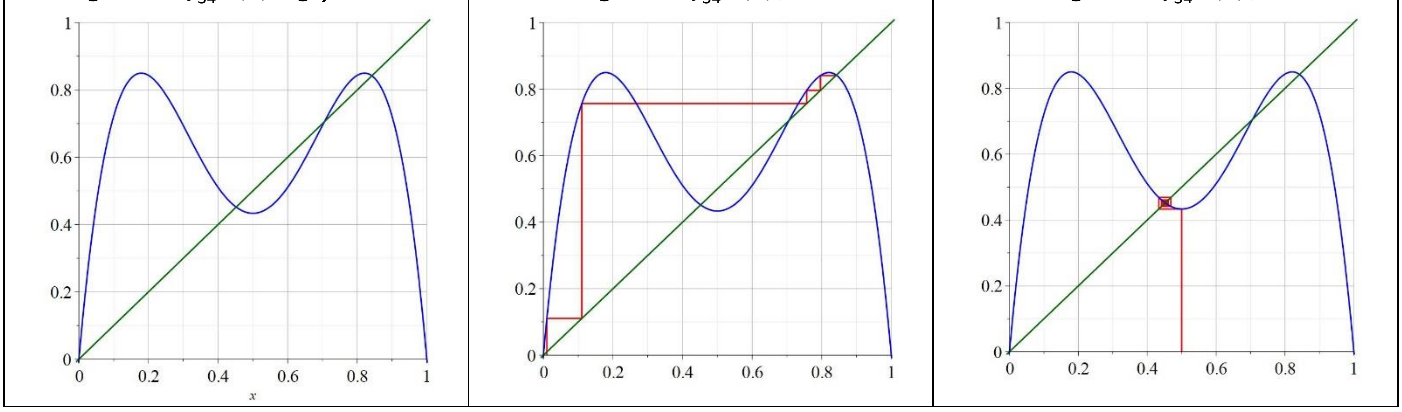
Øvelse 2. Fixpunkter kan være tiltrækkende og frastødende!
a) Hvis en iterationsfølge bliver stationær, så har vi et fixpunkt. Gælder der også det omvendte, at når der optræder fixpunkter bliver en iterationsfølge stationær?
b) Vi ser af den grafiske præsentation af iteration ovenfor, at fixpunkter optræder, hvor grafen for iterationsfunktionen g skærer linjen y = x. Men gælder det altid? Tegn cobweb grafen for $a=3.4$ og $a=3.5$ og kommenter billedet.
c) Betyder det vi ser, at skæringspunktet ikke er et fixpunkt?



d) Hvad er der sket med fixpunktet $x=1-\frac{1}{a}$, efter vi har passeret tallet $a=3$?
Antag, at de to tegninger ovenfor vil blive reproduceret, uanset hvor langt ud i iterationsfølgen vi bevæger os.
e) Argumenter for, at i så fald er de to *x*-værdier til punkterne *P* og *Q* på parabel-grafen for $f_{34}(x)$ fixpunkter for funktionen $f_{34}^{\circ 2}(x)$. Og de fire *x*-værdier til punkterne *R, S, T* og *U* på parabel-grafen for $f_{35}(x)$ fixpunkter for funktionen $f_{35}^{\circ 4}(x)$.

Eksempel 2. Tiltrækkende og frastødende fixpunkter for $f_a^{\circ 2}(x)=f_a(f_a(x))$ og for $f_a^{\circ 4}(x)=f(f(f(f(x))))$
Hvis vi gennemfører samme øvelser med $f_{34}^{\circ 2}(x)=f_{34}(f_{34}(x))$, der har 4 fixpunkter får vi følgende grafer:

graf for $f_{34}^{\circ 2}(x)$ og $y=x$	cobweb-graf for $f_{34}^{\circ 2}(x)$, start 0.01	cobweb-graf for $f_{34}^{\circ 2}(x)$, start 0.5



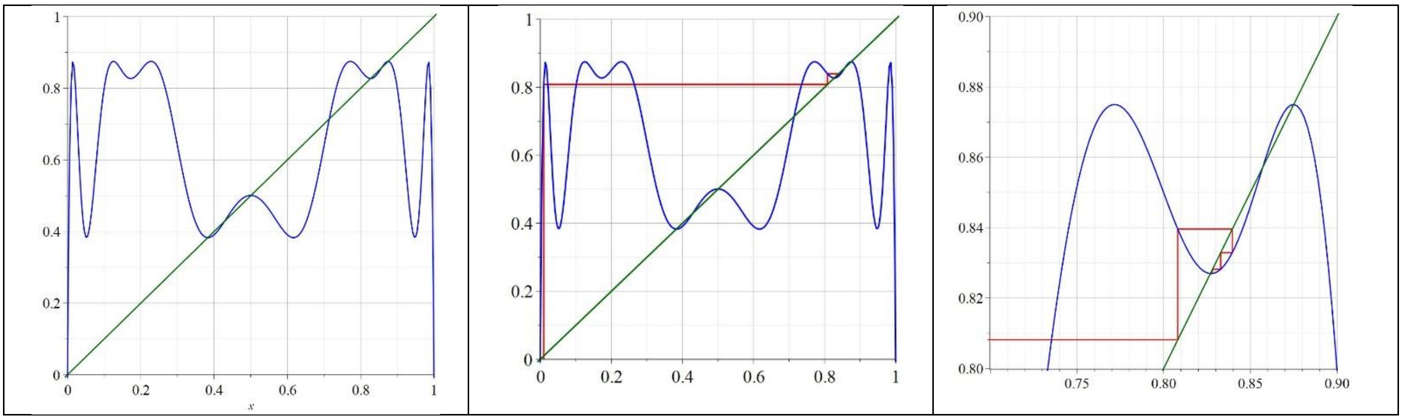
Den første graf viser, at der er 4 skæringspunkter, svarende til de 4 fixpunker med x-værdier:
0., 0.7058823529, 0.4519632476, 0.8421543994

De to første i listen er frastødende, de to næste er tiltrækkende. Dette antydes også af de to næste grafiske billeder: Følgen med startværdi i 0.01 konvergerer mod , 0.8421543994.

ISBN 9788770668699

Følgen med startværdi i 0.5 konvergerer mod , 0.4519632476.

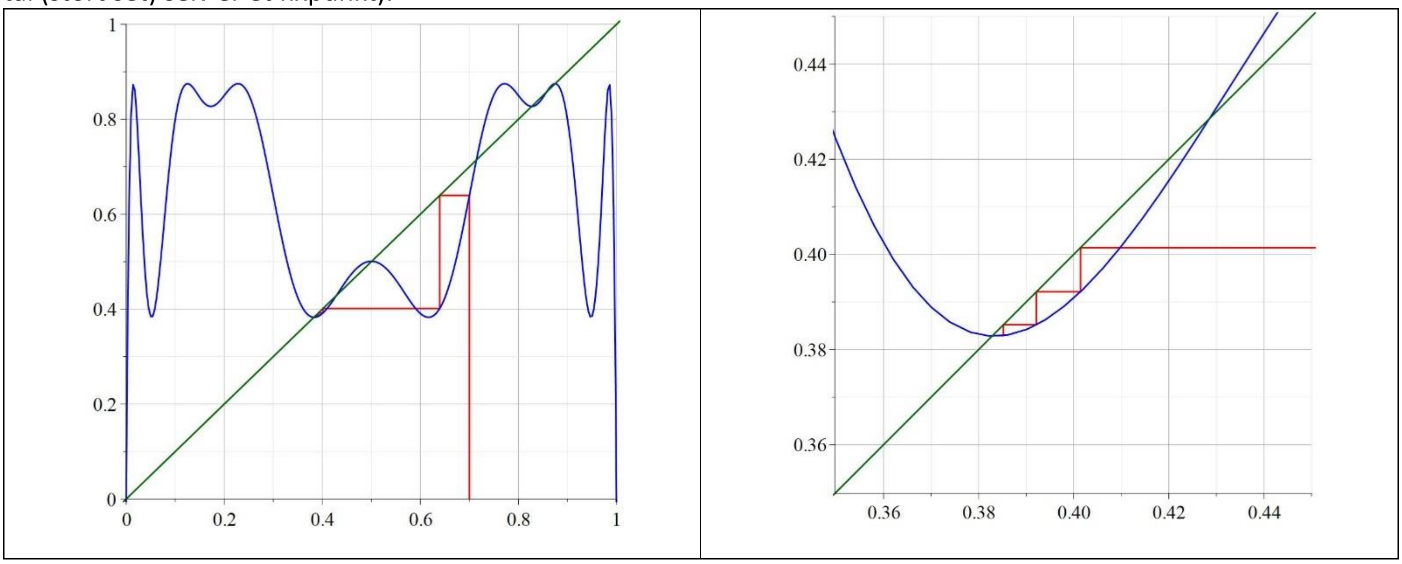
Lad os også gennemføre samme øvelser med $f_{35}^{\circ 4}(x) = f_{35}(f_{35}(f_{35}(f_{35}(x))))$. Vi tegner først som ovenfor grafen sammen med linjen $y = x$. Dernæst cobweb-grafen med startværdi 0.01, og et zoom af billedet, der viser konvergens.



Den første graf viser, at der er 8 skæringspunkter, svarende til de 8 fixpunker med x-værdier:
0., 0.7142857143, 0.8571428571, 0.4285714286, 0.8749972636, 0.8269407066, 0.5008842103, 0.3828196830

De to første i listen er også fixpunkter for $f_{35}(x)$ og er nu i den frastødende zone for denne funktion. De to næste er også fixpunkter for $f_{35}^{\circ 2}(x) = f_{35}(f_{35}(x))$ og vi er ligeledes nu kommet ind i den frastødende zone for $f_{35}^{\circ 2}(x)$. De 4 sidste på listen er tiltrækkende fixpunkter. Dette antydes også af de to næste grafiske billeder:
Følgen med startværdi i 0.01 konvergerer mod, 0.8269407066 – se zoom-billedet (det tredje).

Vælges startværdi 0.7 konvergerer følgen mod 0.3828196830. Dette antydes af de næste billeder, hvor det sidste igen er et zoom af det første. (Bemærk, vi har valgt startværdien 0.7 i stedet for det traditionelle valg 0.5, da dette tal (stort set) selv er et fixpunkt).



Vi har nu eksperimenteret længe nok, og vil give det en mere præcis matematisk beskrivelse for at undersøge, om vi kan karakterisere, hvornår fixpunkter er frastødende og hvornår de er tiltrækkende.

ISBN 9788770668699

2. En formelmæssig beskrivelse af tiltrækkende og frastødende fixpunkter.

Af vores forskellige eksempler ser vi, at for nogle fixpunkters vedkommende er det som om en følge suges ind mod dette, for andre fixpunkter gælder det, at vi itererer os væk fra det; det frastøder os. Derfor indfører vi en skelnen mellem forskellige typer fixpunkter:

Definition 2. Tiltrækkende og frastødende fixpunkter
Et fixpunkt x* kaldes et *tiltrækkende fixpunkt*, hvis der findes et interval *I* om x*, så det for enhver følge $\{x_{n+1}=g(x_n)\}$ gælder, at lander bare èt af x_n'erne i intervallet, så vil følgen konvergere mod x*. (Billedligt suges følgen ind til x* når vi kommer for tæt på - som et sort hul!).
Et fixpunkt kaldes *frastødende*, hvis der findes et interval *I*, så hver gang et x_n fra en sådan følge falder inde i intervallet, så vil det næste i rækken blive skubbet længere bort fra x*. (Billedligt som når vi nærmer to nordpoler til hinanden).

Eksempel 3. Tiltrækkende og frastødende fixpunkter i Feigenbaumsystemet

Lad os igen vende tilbage til Feigenbaumsystemet med den logistiske iterationsfunktion: $f_a(x)=a\cdot x\cdot(1-x)$

Vi så i eksempel 4, at funktionen har to fixpunkter: $x=0 \quad \vee \quad x=1-\frac{1}{a}$. Dette gælder altid. Af vores eksperimenter får vi følgende foreløbige konklusion:

$0<a<1$: $x=0$ er et tiltrækkende fixpunkt. $x=1-\frac{1}{a}$ giver en negativ værdi og er ude af betragtning

$1<a\leq 3$: $x=0$ er nu et frastødende fixpunkt, mens $x=1-\frac{1}{a}$ er et tiltrækkende fixpunkt.

$3<a<3.4494897$: Både $x=0$ og $x=1-\frac{1}{a}$ er nu frastødende fixpunkter for $f_a(x)$. Der opstår" i stedet" *tiltrækkende 2-cykler*, ligesom vi så i tilfældet $a=3.4$. Disse er bestemt som fixpunkter for $f_{34}{}^{\circ 2}(x)$:

$f_{34}{}^{\circ 2}(x)=x$ giver løsningerne: 0., 0.7058823529, 0.4519632476, 0.8421543994

De første to er fixpunkter for $f_{34}(x)$: $1-\frac{1}{a}=1-\frac{1}{3.4}=0.70588$

En mængde bestående af to værdier, $\{0.4519632476, 0.8421543994\}$, som cobweb grafen "cykler" rundt på, kaldte vi i sætning 1, i afsnit 5 for *en stabil 2-cykel* .
Stabile cykler er altså det samme som tiltrækkende cykler

$3.4494897<a<3.5440903$: De 4 fixpunkter for $f_a{}^{\circ 2}(x)$ er nu alle blevet frastødende, og vi ser dem ikke i cobwebgrafen. Der opstår "i stedet" *tiltrækkende 4-cykler*, ligesom vi så i tilfældet $a=3.5$. Disse er bestemt som fixpunkter for $f_{35}{}^{\circ 4}(x)$:

$f_{35}{}^{\circ 4}(x)=x$ giver løsningerne: 0., 0.714286, 0.857143, 0.428571, 0.874997, 0.8269421, 0.500884, 0.382820

De første to er fixpunkter for $f_{35}(x)$: $1-\frac{1}{a}=1-\frac{1}{3.5}=0.714286$

De næste to er de to yderligere fixpunkter for $f_{35}{}^{\circ 2}(x)$: $f_{35}{}^{\circ 2}(x)=0$ giver yderligere: 0.857143, 0.428571.

De 4 x-værdier: $\{0.874997, 0.8269421, 0.500884, 0.382820\}$ ùdgør en 4-cykel, som cobweb grafen "cykler" rundt på.

Sådan fortsætter det gennem alle de stadigt kortere intervaller, som vi så i afsnit 5.2.7: 4-cyklerne bliver i næste interval frastødende og der opstår tiltrækkende 8-cykler. I næste interval igen bliver disse frastødende og der opstår tiltrækkende 16-cykler, 32-cykler … osv. . Hver serie af punkter starter som en *tiltrækkende* følge af punkter, som iterationsfølgen "cykler" rundt i, hvorefter de bliver frastødende. Når vi når Feigenbaums parameter, 3.56994567.., så er alle 2^n - cykler blevet frastødende.
Hvad der sker efter Feigenbaum-parameteren er beskrevet i projekt 0.4.

2.1. Tangenthældningen, hvor grafen skærer linjen $y = x$

Vi har i det foregående gennemgået mange eksempler og udført mange grafiske illustrationer. Prøv at bladre det igennem: Ved at sammenligne og se nøje efter ser vi, at det der åbenbart betyder noget for, om et fixpunkt tiltrækker eller frastøder er, hvor stejl grafen er, netop i fixpunktet. Altså hvorledes hældningen er.
Hvor hældningen på grafen i dette punkt er numerisk større end 1 er punktet frastødende, hvor den er numerisk mindre end 1 er punktet tiltrækkende.

Vi kan faktisk bevise, at dette gælder.

Sætning 2. Betingelsen for om et punkt er frastødende eller tiltrækkende

Lad x^* være et fixpunkt for den differentiable funktion *g*. Så gælder:

1. x^* er et tiltrækkende fixpunkt for g, hvis $|g'(x^*)| < 1$
2. x^* er et frastødende fixpunkt for g, hvis $|g'(x^*)| > 1$.

Betegnelser:

Lad x^* være et fixpunkt for den differentiable funktion *g*.

- Hvis $|g'(x^*)| = 1$ kaldes x^* for et neutralt fixpunkt.
- Hvis $|g'(x^*)| = 0$ kaldes x^* for et supertiltrækkende fixpunkt. (Det vil fremgå senere hvorfor).

Bevis:

Lad x^* være et fixpunkt for den differentiable funktion *g*.

<u>Bevis for 1)</u>

Vi antager at $|g'(x^*)| < 1$. Vælg et tal c med den egenskab at: $|g'(x^*)| < c < 1$. Hold herefter *c* fast.

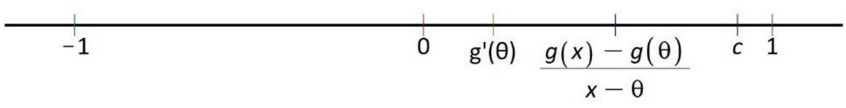
$g'(x^*)$ er en differentialkvotient. Derfor ved vi, at:

$$\frac{g(x) - g(x^*)}{x - x^*} \to g'(x^*) \text{ når } x \to x^*$$

Det betyder, at vi kan vælge et lille interval *J* om x^*, sådan at hvis *x* er i dette interval (altså er tæt på x^*, så vil brøken opfylde:

$$\left|\frac{g(x) - g(x^*)}{x - x^*}\right| < c$$

Situationen kan måske være lettere at overskue, hvis vi afsætter værdierne på en tallinje. (Nedenfor er x^* blevet kaldt for θ).



I uligheden indgår kun positive tal, så vi kan gange over:

$$\left|\frac{g(x) - g(x^*)}{x - x^*}\right| < c \Rightarrow |g(x) - g(x^*)| < c \cdot |x - x^*|$$

Vi udnytter nu $g(x^*) = x^*$ (x^* var jo et fixpunkt), samt at $c < 1$:

$$\left|g(x)-g(x^*)\right| < c \cdot \left|x-x^*\right|$$

$$\left|g(x)-x^*\right| < c \cdot \left|x-x^*\right| \qquad (*)$$

$$\left|g(x)-x^*\right| < \left|x-x^*\right|$$

Dette gælder generelt for alle x i det lille interval *J*.

Definitionen på at et fixpunkt x^* er *tiltrækkende* er, at der findes et interval om punktet x^*, således at der for enhver iterationsfølge $\{x_{n+1}=g(x_n)\}$ gælder, at lander bare ét tilfældigt punkt i følgen indenfor intervallet, så vil følgen konvergere mod x^*.

Som interval vælges *J*. Lad $\{x_{n+1}=g(x_n)\}$ være en tilfældig iterationsfølge, og antag at tallet x_k fra følgen lander i *J*.
Anvend nu x_k som *x* i (*):

$$\left|g(x_k)-x^*\right| < \left|x_k-x^*\right|$$

$$\left|x_{k+1}-x^*\right| < \left|x_k-x^*\right|$$

Her ser vi, at x_{k+1} er tættere på fixpunktet, end x_k.
Så resten af følgen er indenfor intervallet J. Men konvergerer den også mod fixpunktet?
Ja, for (*) fortæller også, at

$$\left|g(x_k)-x^*\right| < c \cdot \left|x_k-x^*\right|$$

$$\left|x_{k+1}-x^*\right| < c \cdot \left|x_k-x^*\right|$$

Øvelse 3. Følgen konvergerer mod x^*

a) Vis, at $\left|x_{k+2}-x^*\right| < c^2 \cdot \left|x_k-x^*\right|$, $\left|x_{k+3}-x^*\right| < c^3 \cdot \left|x_k-x^*\right|$, …, $\left|x_{k+n}-x^*\right| < c^n \cdot \left|x_k-x^*\right|$,…

b) Argumenter for, at punkt a) fortæller, at følgen konvergerer mod x^*.

Vi har således bevist, at x^* er et tiltrækkende fixpunkt.

__Bevis for 2)__

Den anden halvdel af sætningen vedrørende det frastødende, vises på principielt samme måde, men er lidt kortere:

Vi antager at $\left|g'(x^*)\right| > 1$. Vælg et tal c med den egenskab at: $\left|g'(x^*)\right| > c > 1$. Hold herefter *c* fast.

Vi vælger igen et interval *J* om x^*, så det for alle x i dette interval gælder

$$\left|\frac{g(x)-g(x^*)}{x-x^*}\right| > c$$

Øvelse 4. Illustrer situationen

Tegn selv en illustration i lighed med den ovenfor, der illustrerer situationen.

Som før ganges over, og vi udnytter, at x^* er et fixpunkt, og at $c > 1$:

$$\left|\frac{g(x)-g(x^*)}{x-x^*}\right| > c$$

$$|g(x)-g(x^*)| > c \cdot |x-x^*| \qquad (**)$$

$$|g(x)-x^*| > c \cdot |x-x^*|$$

$$|g(x)-x^*| > |x-x^*|$$

Dette gælder generelt for alle x i det lille interval *J*.

Definitionen på at et fixpunkt x^* er *frastødende* er, at der findes et interval om punktet x^*, således at der for enhver iterationsfølge $\{x_{n+1} = g(x_n)\}$ gælder, at lander et tilfældigt punkt x_k i følgen indenfor intervallet, så vil det næste punkt x_{k+1} være længere væk fra x^*.

Som interval vælges *J*. Antag at tallet x_k fra følgen lander i *J*.

Anvend nu x_k som *x* i (**):

$$|g(x_k)-x^*| > |x_k - x^*|$$

$$|x_{k+1}-x^*| > |x_k - x^*|$$

Her ser vi, at x_{k+1} er længere væk fra fixpunktet end x_k, dvs:

Kommer et tal fra følgen ind i J ('tæt på x^*'), vil det næste tal i følgen blive skubbet længere væk fra x^*

Derved har vi også vist den anden del af sætningen.

Øvelse 5. Tiltrækkende og frastødende fixpunkter for $f_a(x) = a \cdot x \cdot (1-x)$

a) I eksempel 3 fandt vi de to fixpunkter, $x = 0 \;\; og \;\; x = 1 - \frac{1}{a}$, og undersøgte eksperimentelt, hvornår der var tale om tiltrækkende og frastødende fixpunkter. Anvend nu sætning 2 til at svare på dette spørgsmål.

b) Bestem de fire fixpunkter for $f_a^{(2)}(x) = f_a(f_a(x))$.

c) Vis, at værdierne af den afledede funktion af $f_a^{(2)}(x)$, i de fire fixpunkter er:

$$a^2,\ (a-2)^2,\ -a^2+2a+4\ ,$$

hvor den sidste optræder to gange.

d) Bestem i hvilke intervaller fixpunkterne er tiltrækkende og hvor de er frastødende.

I projekt 8.12 om Newton Raphsons metode kan du finde en spektakulær anvendelse af teorien om tiltrækkende og supertiltrækkende fikspunkter: Vi finder her en forklaring på, at en bestemt algoritme til at bestemme nulpunkter virker, og at det er en meget effektiv algoritme.