ISBN 9788770668699

Chebyshevs ulighed (især for A-niveau)

Sætning: **Der er grænser for hvor få normale og for hvor mange exceptionelle værdier der kan være.**
For en vilkårlig stokastisk variabel (X,p) vil sandsynligheden for at være *normal* mindst være $\frac{3}{4}$ og sandsynligheden for at være *exceptionel* vil højst være $\frac{1}{9}$, dvs.:

$$p(x\,\text{normal}) \geq \frac{3}{4} \qquad \text{og} \qquad p(x\,\text{exceptionel}) < \frac{1}{9}$$

Bemærkning: Chebyshev formulerede sin ulighed mere generelt idet han opstillede en formel for, hvad sandsynligheden er for, at vi i et stokastisk eksperiment får et resultat, der befinder sig i en bestemt afstand fra den forventede værdi (middelværdien).

Bevis:
Vi viser resultatet for de exceptionelle udfald:

$$p(x\,\text{exceptionel}) = \sum_{|x_i-\mu|>3\sigma} p_i$$

Anvend, at sandsynligheden for at være exceptionel er summen af sandsynlighederne for de exceptionelle værdier.

$$< \sum_{|x_i-\mu|>3\sigma} p_i \cdot \frac{(x_i-\mu)^2}{9\sigma^2}$$

Gang hvert af leddene med et tal, der er større end 1, idet $|x_i-\mu|>3\sigma$. Summen bliver derfor større!

$$= \frac{1}{9\sigma^2} \cdot \sum_{|x_i-\mu|>3\sigma} p_i \cdot (x_i-\mu)^2$$

Sæt en fælles faktor $\frac{1}{9\sigma^2}$ udenfor.

$$< \frac{1}{9\sigma^2} \cdot \sum_{\text{alle } x} p_i \cdot (x_i-\mu)^2$$

Udstræk summen til alle værdierne, hvorved summen igen bliver større.

$$= \frac{1}{9\sigma^2} \cdot \sigma^2 = \frac{1}{9}$$

Erstat summen med σ^2 ifølge definitionen på variansen.
Reducér.

Dermed har vi eftervist $p(x\,\text{exceptionel}) < \frac{1}{9}$ som påstået i sætningen. ✓

Øvelse 1
Vis nu selv resultatet for de normale udfald. *Vink*: Betragt området *udenfor* normalområdet, og læg mærke til, at der stort set blot sker det, at 9 erstattes med 4 i udregningerne ovenfor. Benyt derefter resultatet for sandsynligheden af modsatte hændelser