ISBN 9788770668279

Binomialfordelingen og formlen for middelværdien (især for A-niveau)

Vi har i et eksempel fra starten af afsnit 5 argumenteret for formlen:

$$\binom{n}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^n+\binom{n}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\cdot p^n\cdot(1-p)^0=1$$

I et link til bogens website kan man finde et bevis for, at formlen kan generaliseres til det vi kalder for binomialformlen:

$$(p+q)^n=\binom{n}{0}\cdot p^0\cdot q^n+\binom{n}{1}\cdot p^1\cdot q^{n-1}+\ldots+\binom{n}{n}\cdot p^n\cdot q^0=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot q^{n-i}$$

.

Middelværdien for en binomialfordeling

Binomialformlen er udgangspunktet for alle beviser vedrørende binomialfordelingen i den videregående matematik. Beviserne er ofte overraskende. Hvis vi fx opfatter p som den uafhængige variable og binomialformlen som en regneforskrift for en funktion af p:

$$f(p)=(p+q)^n$$

så kan vi differentierer med hensyn til p. Det gør vi ved udnytte binomialformlen:
Vi differentierer venstre side som en sammensat funktion:

$$f'(p)=n\cdot(p+q)^{n-1}$$

Vi differentierer højre side ved at udnytte regnereglerne for differentiation (for symmetriens skyld har vi skrevet differentialkvotienten af p^0 som p^{-1}. Da det ganges med 0 er det for resultatet lige meget, men det gør, at vi ikke skal lave undtagelser mht brugen af potensregler osv.:

$$f'(p)=\binom{n}{0}\cdot 0\cdot p^{-1}\cdot q^n+\binom{n}{1}\cdot 1\cdot p^0\cdot q^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot 2\cdot p^1\cdot q^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\cdot n\cdot p^{n-1}\cdot q^0$$

Men binomialformlen siger jo, at højre og venstre side er ens, så er differentialkvotienterne også ens:

$$n\cdot(p+q)^{n-1}=\binom{n}{0}\cdot 0\cdot p^{-1}\cdot q^n+\binom{n}{1}\cdot 1\cdot p^0\cdot q^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot 2\cdot p^1\cdot q^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\cdot n\cdot p^{n-1}\cdot q^0$$

Ganger vi nu ligningen igennem med p får vi løftet potenserne af p til de oprindelige værdier

$$n\cdot p\cdot(p+q)^{n-1}=\binom{n}{0}\cdot 0\cdot p^0\cdot q^n+\binom{n}{1}\cdot 1\cdot p^1\cdot q^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot 2\cdot p^2\cdot q^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\cdot n\cdot p^n\cdot q^0$$

Men denne ligning kan nu omformes til

$$n\cdot p\cdot(p+q)^{n-1}=0\cdot\binom{n}{0}\cdot p^0\cdot q^n+1\cdot\binom{n}{1}\cdot p^1\cdot q^{n-1}+2\cdot\binom{n}{2}\cdot p^2\cdot q^{n-2}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}\cdot p^n\cdot q^0$$

Denne formel gælder for alle p, q, og n.
Sætter vi nu ligesom før $q = 1 - p$ genfinder vi binomialsandsynlighederne, dvs. vi finder

$$n\cdot p\cdot(p+1-p)^{n-1}=0\cdot\binom{n}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^n+1\cdot\binom{n}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^{n-1}+2\cdot\binom{n}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{n-2}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}\cdot p^n\cdot(1-p)^0$$

$$n\cdot p\cdot 1^{n-1}=0\cdot p(X=0)+1\cdot p(X=1)+2\cdot p(X=2)+\ldots+n\cdot p(X=n)$$

$$n\cdot p=0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+\ldots+n\cdot p_n=\mu$$

Men dermed har vi netop udledt formlen for middelværdien for en binomialfordeling:
Middelværdien for en binomialfordelt stokastisk variabel udregnes ved formlen:

$$\mu=n\cdot p$$

ISBN 9788770668279

Første gang man ser et sådant bevis virker det som et mirakel: At man kan differentiere en sumformel på passende vis og derved få en ny og interessant sumformel ud af det. Men det har vist sig at være et af de vigtigste våben i den moderne matematiks arsenaler og fx teoretisk fysik ville være utænkelig uden dette mægtige våben.

Udledning af formlerne med brug af sætning 1 om regneregler.

Vi har i sætning 2 udledt formlerne for middelværdi og varians af Bernouillifordelte stokastiske variable. Disse svarer til basiseksperimentet, hvor vi altså udfører ét forsøg.

Sætning 2: Middelværdi, varians og spredning for Bernouillifordelinger
For et Bernoulli fordelt stokastisk variabel med sandsynlighedsparameteren p gælder
1) $E(X)=p$ 2) $V(X)=p\cdot(1-p)$ 3) $\sigma(X)=\sqrt{p\cdot(1-p)}$.

I en binomialmodel gentages sådanne forsøg n gange, og uafhængigt af hinanden. Men er forsøgene uafhængige, så gælder sætning 1:

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ og $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

De identiske forsøg gentages, og resultatet af det samlede forsøg fremkommer ved inspektion af 1. forsøg, 2. forsøg osv. Der kan knyttes en stokastisk variabel X_i til hvert forsøg, og der er hver gang to muligheder: held gives tallet 1 og uheld gives tallet 0.

Den binomialfordelte stokastiske variabel *Z* tæller *antallet af held*, og kan derfor betragtes som summen af de enkelte:

$$Z=X_1+X_2+...+X_n$$

Derfor får vi middelværdi og varians ved at summere:

$$E(Z)=E(X_1+X_2+...+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)=p+p+...+p=n\cdot p$$

$$V(Z)=V(X_1+X_2+...+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+...+V(X_n)=p\cdot(1-p)+p\cdot(1-p)+...+p\cdot(1-p)=n\cdot p\cdot(1-p)$$

hvilket var det ønskede resultat.