ISBN 9788770668279

Binomialformlen og sammenhængen med Pascals trekant

Vi har i et eksempel i kapitel 9, afsnit 5 argumenteret for følgende formel:

$$(p+q)^n = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i} \quad (*)$$

der gælder hvor $p+q=1$.

Vi vil nu bevise, at denne formel, der kaldes for binomialformlen, gælder generelt for ethvert valg af *p* og *q*.
Formlen gælder helt trivialt, hvis de to tal begge er lig med 0.
Herefter antages, at summen af de to tal er forskellig fra 0.

I beviset vil vi føre den generelle situation tilbage til situationen, hvor summen er 1. Hvilket tal *k* skal vi gange på $p+q$ for at få 1?

$$k \cdot (p+q) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{p+q}$$

Nu skriver vi derfor i første omgang:

$$p+q = (p+q) \cdot \left(\frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} \right)$$, og derfor også:

$$(p+q)^n = (p+q)^n \cdot \left(\frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} \right)^n$$

Den sidste parentes kan vi udregne, da de to tal i parentesen opfylder betingelserne for (*). Forklar i detaljer, hvad der sker og hvilke potensregler, brøkregler og parentesregler vi bruger undervejs

$$\begin{aligned}
(p+q)^n &= (p+q)^n \cdot \left(\frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} \right)^n \\
&= (p+q)^n \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \left(\frac{p}{p+q} \right)^i \cdot \left(\frac{q}{p+q} \right)^{n-i} \\
&= (p+q)^n \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \frac{p^i}{(p+q)^i} \cdot \frac{q^{n-i}}{(p+q)^{n-i}} \\
&= (p+q)^n \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \frac{p^i \cdot q^{n-i}}{(p+q)^i \cdot (p+q)^{n-i}} \\
&= (p+q)^n \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \frac{p^i \cdot q^{n-i}}{(p+q)^n} \\
&= (p+q)^n \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \frac{1}{(p+q)^n} \cdot p^i \cdot q^{n-i} \\
&= (p+q)^n \cdot \frac{1}{(p+q)^n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}
\end{aligned}$$

Konklusion:

$$(p+q)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$, eller skrevet ud:

$$(p+q)^n = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0$$

ISBN 9788770668279

Binomialformlen og Pascals trekant

Ordet *binomium* betyder et udtryk af formen $(p+q)$ hvor der indgår to variable eller parametre, som vi her kalder for *p* og *q*.

Binomialformlen er en formel, der angiver, hvorledes vi kan udregne udtryk af typen $(p+q)^n$, hvor *n* er et helt tal.
Vi har tidligere mødt binomialformlen i projekter og i den indledende fortælling til kapitel 5B. Hvis vi ser på de første taleksempler, ser vi, at koefficienterne faktisk er de tal, der indgår i Pascals trekant:

$$\begin{aligned}
(p+q)^0 &= \color{red}{1} \\
(p+q)^1 &= \color{red}{1}\cdot p+\color{red}{1}\cdot q \\
(p+q)^2 &= \color{red}{1}\cdot p^2+\color{red}{2}\cdot p\cdot q+\color{red}{1}\cdot q^2 \\
(p+q)^3 &= \color{red}{1}\cdot p^3+\color{red}{3}\cdot p^2\cdot q+\color{red}{3}\cdot p\cdot q^2+\color{red}{1}\cdot q^3 \\
(p+q)^4 &= \color{red}{1}\cdot p^4+\color{red}{4}\cdot p^3\cdot q+\color{red}{6}\cdot p^2\cdot q^2+\color{red}{4}\cdot p\cdot q^3+\color{red}{1}\cdot q^4
\end{aligned}$$

Tallene i Pascals trekant er altså binomialkoefficienter. I et projekt om Pascals trekant argumenterer vi for dette resultat ud fra *sumreglen* i trekanten.
Vi kan forstå strukturen i binomialformlen ved at se på, hvordan man udregner produktet af flere led. Vi viser det først med tredje potens:

$$(p+q)^3=(p+q)\cdot(p+q)\cdot(p+q).$$

Alle led i det endelige produkt fremkommer ved vi fra hver af parenteserne vælger ét af tallen *p* eller *q*. Det kan give led som

$$p\cdot p\cdot q,\ \ p\cdot q\cdot p,\ \text{og}\ \ p\cdot q\cdot q$$

Vi skal vælge ét tal fra hver af de tre parenteser. Dette kan gøres på i alt $2\cdot2\cdot2=8$ måder. Så resultatet af produktet giver 8 led. Men nogle af dem er ens, fx er de to sidste af de tre eksempler begge lig med $p\cdot q^2$. Hvor mange af denne type er der? Vi skal have to *q*'er, så vi skal altså vælge to *q*'er ud af tre parenteser, hvilket kan gøres på $K(3,2)=\binom{3}{2}$ forskellige måder. Derfor kan vi samle de 8 led, så vi får følgende:

$$(p+q)^3=K(3,0)\cdot p^3\cdot q^0+K(3,1)\cdot p^2\cdot q^1+K(3,2)\cdot p^1\cdot q^2+K(3,3)\cdot p^0\cdot q^3$$

eller: $$(p+q)^3=\binom{3}{0}\cdot p^3\cdot q^0+\binom{3}{1}\cdot p^2\cdot q^1+\binom{3}{2}\cdot p^1\cdot q^2+\binom{3}{3}\cdot p^0\cdot q^3$$

med tal: $$(p+q)^3=1\cdot p^3\cdot q^0+3\cdot p^2\cdot q^1+3\cdot p^1\cdot q^2+1\cdot p^0\cdot q^3$$

Argumenter selv for formlen for udregning af $(p+q)^5$.
Med brug af binomialkoefficienterne kan vi nu skrive den generelle binomialformel på formen

$$(p+q)^n=\binom{n}{0}\cdot p^0\cdot q^n+\binom{n}{1}\cdot p^1\cdot q^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot p^2\cdot q^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\cdot p^n\cdot q^0\ ,$$

hvor det generelle led er $\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$.