

Projekt 9.8 Binomialformlen og sammenhængen med Pascals trekant

Vi har i et eksempel i kapitel 9, afsnit 5 argumenteret for følgende formel:

$$(p+q)^n = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i} \quad (*)$$

der gælder hvor $p+q=1$.

Vi vil nu bevise, at denne formel, der kaldes for binomialformlen, gælder generelt for ethvert valg af p og q .

Formlen gælder helt trivielt, hvis de to tal begge er lig med 0.

Herefter antages, at summen af de to tal er forskellig fra 0.

I beviset vil vi føre den generelle situation tilbage til situationen, hvor summen er 1. Hvilket tal k skal vi gange på $p+q$ for at få 1?

$$k \cdot (p+q) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{p+q}$$

Nu skriver vi derfor i første omgang:

$$p+q = (p+q) \cdot \left(\frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} \right), \text{ og derfor også:}$$

$$(p+q)^n = (p+q)^n \cdot \left(\frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} \right)^n$$

Den sidste parentes kan vi udregne, da de to tal i parentesens opfylder betingelserne for (*). Forklar i detaljer, hvad der sker og hvilke potensregler, brøkreger og parentesregler vi bruger undervejs

$$\begin{aligned} (p+q)^n &= (p+q)^n \cdot \left(\frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} \right)^n \\ &= (p+q)^n \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \left(\frac{p}{p+q} \right)^i \cdot \left(\frac{q}{p+q} \right)^{n-i} \\ &= (p+q)^n \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \frac{p^i}{(p+q)^i} \cdot \frac{q^{n-i}}{(p+q)^{n-i}} \\ &= (p+q)^n \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \frac{p^i \cdot q^{n-i}}{(p+q)^i \cdot (p+q)^{n-i}} \\ &= (p+q)^n \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \frac{p^i \cdot q^{n-i}}{(p+q)^n} \\ &= (p+q)^n \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \frac{1}{(p+q)^n} \cdot p^i \cdot q^{n-i} \\ &= (p+q)^n \cdot \frac{1}{(p+q)^n} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i} \end{aligned}$$

Konklusion:

$$(p+q)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}, \text{ eller skrevet ud:}$$

$$(p+q)^n = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0$$

Binomialformlen og Pascals trekant

Ordet *binomium* betyder et udtryk af formen $(p+q)$ hvor der indgår to variable eller parametre, som vi her kalder for p og q .

Binomialformlen er en formel, der angiver, hvorledes vi kan udregne udtryk af typen $(p+q)^n$, hvor n er et helt tal.

Vi har tidligere mødt binomialformlen i projekter og i den indledende fortælling til kapitel 5B. Hvis vi ser på de første taleksempler, ser vi, at koefficienterne faktisk er de tal, der indgår i Pascals trekant:

$$\begin{aligned} (p+q)^0 &= 1 \\ (p+q)^1 &= 1 \cdot p + 1 \cdot q \\ (p+q)^2 &= 1 \cdot p^2 + 2 \cdot p \cdot q + 1 \cdot q^2 \\ (p+q)^3 &= 1 \cdot p^3 + 3 \cdot p^2 \cdot q + 3 \cdot p \cdot q^2 + 1 \cdot q^3 \\ (p+q)^4 &= 1 \cdot p^4 + 4 \cdot p^3 \cdot q + 6 \cdot p^2 \cdot q^2 + 4 \cdot p \cdot q^3 + 1 \cdot q^4 \end{aligned}$$

Tallene i Pascals trekant er altså binomialkoefficienter. I projekt 9.12 i *Hvad er matematik? 1* om Pascals trekant argumenterer vi for dette resultat ud fra *sumreglen* i trekanten.

Vi kan forstå strukturen i binomialformlen ved at se på, hvordan man udregner produktet af flere led. Vi viser det først med tredje potens:

$$(p+q)^3 = (p+q) \cdot (p+q) \cdot (p+q).$$

Alle led i det endelige produkt fremkommer ved, at vi fra hver af parenteserne vælger ét af tallene p eller q . Det kan give led som

$$p \cdot p \cdot q, p \cdot q \cdot p, \text{ og } p \cdot q \cdot q$$

Vi skal vælge ét tal fra hver af de tre parenteser. Dette kan gøres på i alt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ måder. Så resultatet af produktet giver 8 led. Men nogle af dem er ens, fx er de to sidste af de tre eksempler begge lig med $p \cdot q^2$. Hvor mange af denne type er der? Vi skal have to q 'er, så vi skal altså vælge to q 'er ud af tre parenteser, hvilket kan gøres på

$$K(3,2) = \binom{3}{2} \text{ forskellige måder.}$$

Derfor kan vi samle de 8 led, så vi får følgende:

$$(p+q)^3 = K(3,0) \cdot p^3 \cdot q^0 + K(3,1) \cdot p^2 \cdot q^1 + K(3,2) \cdot p^1 \cdot q^2 + K(3,3) \cdot p^0 \cdot q^3$$

$$\text{eller: } (p+q)^3 = \binom{3}{0} \cdot p^3 \cdot q^0 + \binom{3}{1} \cdot p^2 \cdot q^1 + \binom{3}{2} \cdot p^1 \cdot q^2 + \binom{3}{3} \cdot p^0 \cdot q^3$$

Indsættes binomialkoefficienternes værdi, får vi:

$$(p+q)^3 = 1 \cdot p^3 \cdot q^0 + 3 \cdot p^2 \cdot q^1 + 3 \cdot p^1 \cdot q^2 + 1 \cdot p^0 \cdot q^3$$

Argumenter selv for formelen for udregning af $(p+q)^5$.

Projekter: fra kapitel 9 Projekt 9.8 Binomialformlen og sammenhængen med Pascals trekant

Med brug af binomialkoefficienterne kan vi nu skrive den generelle binomialformel på formen

$$(p+q)^n = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0 ,$$

hvor det generelle led er $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

Med brug af sumtegnet skrives det derfor også:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$