ISBN 9788770668699

Projekt 9.7 St. Petersborg paradokset

Sandsynlighedsteoriens opgave er at beskrive, forudsige og regelsætte tilfældige hændelser. Da tilfældige hændelser er karakteriseret ved at de er umiddelbart ubeskrivelige, uforudsigelige og tilsyneladende kaotiske, kan sandsynlighedsteoriens opgave formuleres således:

Beskriv det ubeskrivelige, forudsig det uforudsigelige, og find orden, hvor ingen orden findes.

Det lyder paradoksalt, hvordan skal man kunne det? Men ikke desto mindre er det faktisk lykkedes at skabe en velfungerende sandsynlighedsteori. Vi vil se på et par historiske eksempler, hvoraf det sidste til en vis grad stadig finder anvendelse inden for økonomiske risikovurdering.

1 De store tals lov & vinderchancer

I *Hvad er matemat6ik*? 1 omtalte vi i kapitel 9 de store tals lov, som siger:

Hvis en spiller i et stort antal uafhængige spil spiller på, at den samme hændelse indtræffer, så vil hans chance for at vinde samlet set være lig med sandsynligheden for hændelsen.

Som eksempel på de store tals lov betragter vi et spil roulette. På en roulette i et dansk kasino er der 37 felter i alt – 18 røde og 18 sorte samt et "0", som hverken er rødt eller sort (normalt grønt). De røde og sorte felter er nummererede fra 1 til 36. Kuglen kan altså havne på 37 forskellige felter, dvs. der er i alt 37 forskellige udfald. Hvis rouletten er korrekt konstrueret og korrekt opstillet, vil alle 37 tal have lige stor sandsynlighed for at forekomme. Over lang tid og mange spil vil vi derfor forvente, at tallet 0 kommer ud ca. hver 37´te gang, tallet 1 ca. hver 37´te gang osv.

I et stort antal spil bør antallet af gange, kuglen lander på fx tallet 7, derfor være $\frac{1}{37}$ af det samlede antal spil. Det kan man da også iagttage i praksis. Hvis man over en lang aften på et kasino tæller op, hvor ofte tallet 7 kommer ud, så vil man opdage, at antallet af spil, hvor kuglen havner på tallet 7, set i forhold til det samlede antal spil den aften, faktisk lander ret tæt på $\frac{1}{37}=0{,}027$. Ser vi fx på 10000 spil, så vil antallet af gange, hvor kuglen havner på 7 være:

$$10000\cdot\frac{1}{37}=10000\cdot 0{,}027=270$$

I stedet for at gå på kasino kan vi naturligvis også simulere et spil roulette i et værktøjsprogram – selvom det måske ikke er helt så festligt!

Øvelse 1 Simulering af et Roulettespil

a) Opret i dit regneark en liste over de 37 mulige udfald i et roulettespil, dvs. {0, 1, 2, …, 36}.
b) Opret en liste over de 37 gevinster i et roulettespil, hvor vi satser på feltet 1 med en indsats på 1 kr., dvs. {0, 36, 0, …, 0}, idet en gevinst giver indsatsen tilbage ganget med 36.
c) Opret en liste med 1000 tilfældige udfald af spillet (fx med brug af en randomfunktion) – svarende til at du spiller roulette 1000 gange og afbild udfaldene i et histogram. Tegn også den vandrette linje $f(x)=1000/37$ i histogrammet. Gentag simuleringen. Konklusion?
d) Udregn den samlede gevinst for de 1000 spil. Konklusion?
e) Hvis du har mod på det så udfør en opsamling af gevinsten for 1000 spil og gentag simuleringen 1000 gange, så du får opsamlet gevinsterne i 1000 gentagelser af 1000 spil. Du kan hente en animation af opsamlingen på hjemmesiden. Hvad bliver gennemsnitsgevinsten for de 1000 gentagelser?

Før en hardcore-spiller gider spille et bestemt spil, skal der være en fair chance for at vinde. Et helt fair spil defineres som et spil, hvor den gennemsnitlige gevinst pr. spil i det lange løb ('uendeligt mange' spil) netop matcher spillerens indsats pr. spil. Et sådant spil ville ingen udbyde.

ISBN 9788770668699

Eksempel: Roulettespil
På en roulette får man pengene 36 gange tilbage, hvis man spiller på fx tallet 7. I det lange løb vinder man altså 36 kr. på $\frac{1}{37}$ af spillene og ingenting i resten af spillene. Hvis vi ser på 1000 spil med en indsats på 1 kr. pr. spil giver det en forventet gevinst på i alt:

$$36 \cdot 1000 \cdot \frac{1}{37} = 972{,}97 \text{ kr.}$$

Hvis vi så trækker indsatsen fra, så vil vores forventede gevinst efter de 1000 spil være:

$$972{,}97 - 1000 = -27{,}02 \text{ kr.}$$

Dvs. der er tale om et tab på $27{,}02$ kr.! Altså er roulette spillet ikke helt fair, fordi man taber ca. 2,7% af sin indsats i de lange løb. Problemet ved roulette er jo, at man kun får 36 kr. igen, selv om der 37 felter, og chancen for at vinde er $\frac{1}{37}$ og ikke $\frac{1}{36}$ – gevinsten står altså ikke mål med indsatsen. Ellers var der jo heller ingen grund til at bestyre et Casino.

Øvelse 2
På den amerikanske udgave af rouletten indgår også feltet ”00”, som har samme status som ”0”. Hvad er den forventede gevinst for 1000 spil på denne type roulette med en indsats på 1 kr. pr. spil?

Eksempel: Kan man sprænge banken?
Hvad nu hvis rouletten ikke er helt rigtig indstillet? Hvis man fx over en hel dag i et kasino noterer alle udfald og observerer en vis skævhed i udfaldene, så kan det jo være fordi, rouletten ikke er helt afbalanceret. Antag fx, at tallet 7 forekommer en smule oftere end alle andre tal på rouletten i løbet af dagen, således at sandsynligheden for 7 er 0,029 i stedet for 0,027, som vi så ovenfor. En så lille forskel vil kun ganske få spillere (og ansatte) opdage, men det er ret afgørende for en spiller, der satser højt! Hvis en spiller i stedet for 1 kr. fx satser 100kr. pr spil over 1000 spil, så vil han ifølge de store tals lov vinde 29 gange – i stedt for 27 gange – og tabe 971 gange. Hans gevinst for hvert af de vundne spil vil være $36 \cdot 100 = 3600$ kr, dvs. hans samlede gevinst over de 1000 spil vil være:

$$29 \cdot 3600 - 100 \cdot 1000 = 4400 \text{ kr.}$$

Dvs. han får et solidt overskud på sine mange spil. Valgte han i stedet at satse 1000 kr. pr. spil, ville han opnå et samlet overskud på 44000 kr., hvilket må siges at være en ret stor sum penge! Men skal man ”sprænge banken”, så skal der en væsentlig højere indsats til, og da man jo også skal spille rigtig mange spil, så er det kun de færreste, der kan være med. Og hvad nu hvis man gætter forkert… hvis observationerne af roulettens opførsel den ene dag er forskellig fra roulettens opførsel den næste dag? Eller de bytter rundt på rouletterne? Så kan man ende med meget store tab!

2 Den matematiske forventningsværdi til et spil

Ved den matematiske forventningsværdi for en tilfældigt varierende størrelse knyttet til et spil forstås:

Den gennemsnitlige værdi af størrelsen set over ’uendeligt mange’ spil (dvs. i det lange løb).

Den matematiske forventningsværdi betegnes med E (for det engelske ord *expected value*). Hvis vi kalder sandsynligheden for at vinde p_{vinder} i et bestemt spil, så er det en konsekvens af de store tals lov, at den matematiske forventningsværdi for *udbyttet*, der jo varierer tilfældigt fra spil til spil, er givet ved:

$$E(\text{udbytte}) = p_{\text{vinder}} \cdot \text{gevinst} - \text{indsats}$$

For rouletten ovenfor bliver den matematiske forventningsværdi for udbyttet derfor:

$$E(\text{udbytte pr. spil}) = \tfrac{1}{37} \cdot 36 \text{ kr.} - 1 \text{ kr.} = -\tfrac{1}{37} \text{ kr.} = -0{,}027 \text{ kr.}$$

I en 37’de del af spillene vinder vi nemlig 36 kr., i resten af spillene vinder vi ingenting, men hver gang betaler vi 1 kr. for at deltage.

ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse EGMONT

Da sandsynligheden for at vinde hver gang er den samme, og da gevinsten for hvert spil også er den samme, så kan vi beregne det forventede negative overskud på 1000 spil til:

$$\text{Forventet udbytte på 1000 spil} = -0{,}027 \cdot 1000 \text{ kr.} = -27 \text{ kr.}$$

Øvelse 3

a) Hvad er sandsynligheden for at kuglen rammer et sort felt?

b) Hvis vi satser 10 kr. på ”sort”, hvad er så den matematiske forventningsværdi for udbyttet af spillet, idet et sort felt giver indsatsen dobbelt tilbage?

c) Antag nu, at vi spiller 1000 spil, hvor vi satser 10 kr. på ”sort”. Hvad er så den matematiske forventningsværdi for udbyttet af disse 1000 spil?

Øvelse 4

På et dansk kasino ser roulettebordet ud som på billedet.

a) Overvej, hvilke andre muligheder, det giver for at spille end de allerede nævnte.

b) Overvej, hvad sandsynligheden for at vinde i disse spil.

c) Find ud af hvad gevinsterne er for hvert af disse spil. Beregn derefter det forventede udbytte for hvert af disse spil.

Ovenfor har vi set på meget simple spil, hvor gevinsten er knyttet til ét bestemt udfald af spillet. Men der er også spil, hvor der er forskellige gevinster knyttet til forskellige udfald. Det gælder fx lotterier.

Eksempel: **KLasselotteriet**

I Klasselotteriet er der hver måned 440000 lodder med i lodtrækningen. Gevinstplanen fremgår af tabellen. Det koster 144 kr. at købe et enkelt lod. Når vi skal finde det forventede udbytte går vi derfor frem på følgende måde:

$$E(\text{udbytte}) = \frac{2}{440000} \cdot 1700000 + \frac{7}{440000} \cdot 1062500 + \ldots + \frac{422446}{440000} \cdot 0 - 144$$

$$= 7.73 + 16.90 + 2.41 + 1.93 + 1.93 + 2.32 + 3.86 + 5.80 + 37.67 - 144$$

$$= 52.55 - 144 = -91.45$$

Den forventede gevinst udregnes således: I to ud af 440000 lodder vinder du 1 million 7 hundrede tusinde kr. Det giver en gennemsnitlig gevinst pr. lod på 7.73 kr. Således fortsættes udregningen gennem alle de forskellige gevinsttyper og den samlede gennemsnitlige gevinst findes som summen af de enkelte bidrag. Den samlede gennemsnitlige gevinst pr lod er derfor 52.55 kr.

Antal lodder	Gevinst
2	1700000 kr.
7	1062500 kr.
5	212500 kr.
10	85000 kr.
20	42500 kr.
60	17000 kr.
200	8500 kr-
1000	2550 kr.
16250	1020 kr.
422446	0 kr.

I almindelighed udregnes det forventede udbytte pr. spil derfor ved hjælp af formlen:

$$E(\text{udbytte}) = \sum p_{gevinst} \cdot gevinst - indsats$$

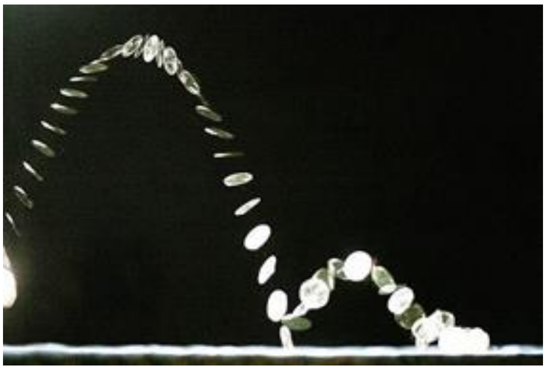
hvor vi altså udregner summen af alle de forventede gevinster for de forskelige gevinsttyper og til slut trækker indsatsen fra.

ISBN 9788770668699

3 St. Petersborg Paradokset

Et klassisk problem inden for sandsynlighedsregning er det såkaldte St. Petersborg problem:

En spiller kaster en mønt, og banken går med til at betale 2 kr. til spilleren, hvis spilleren får krone i første kast, 4 kroner, hvis spilleren først får krone i andet kast osv., således at gevinsten bliver fordoblet, hver gang udfaldet krone lader vente på sig.

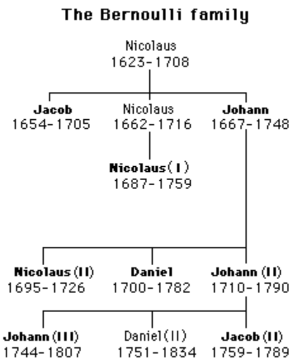


Spørgsmålet er så: *Hvad vil være en rimelig indsats for spilleren i dette spil?*

Rent matematisk spørger vi, hvad er den matematiske forventnings værdi for gevinsten i dette spil? Og på den baggrund, hvad er så en rimelig indsats for en spiller i dette spil?

Spillet optræder første gang i sandsynlighedsregningens historie i 1738. Diskussionen udsprang af en korrespondance mellem den schweiziske matematiker Nicolas Bernoulli (1687-1759) i Basel – og den franske matematiker Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) i Paris. Senere kom også brevvekslinger med Gabriel Cramer(1704-1752) og Daniel Bernoulli (1770-1782) til, og i 1738 blev problemet endeligt løst. Du kan finde brevvekslingen mellem Montmort og Bernouilli her (link til filen: ***st p paradox-corresp bernouilli-montmort*** i mappen: **Projekt 9.7 - Sct Petersborg)**

Brødrene Monmort: Pierre var ophavsmand til en tidlig version af St. Petersborg problemet.

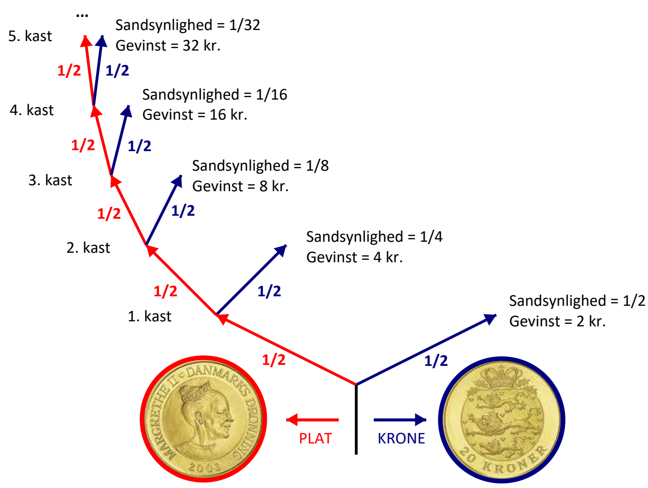


Bernoullifamilien fra Schweiz: Ingen anden familie har produceret så mange berømte matematikere.

Nicolaus Bernoulli, der korresponderede med Monmort om problemer i hasardspil.

Daniell Bernoulli, der endeligt løste St. Petersborg Paradokset i 1738.

Montmort havde i 1708 skrevet bogen med titlen ”Essay d'analysere sur les jeux de fare”, som Nicolas Bernoulli var meget interesseret i, herunder specielt Montmorts Problem 5 på side 402, der beskriver St. Petersburg Spillet i en meget tidlig version. Brevvekslingen begynder allerede i 1713, hvor Nicolas Bernoulli stiller en række spørgsmål til Montmort.Vi vil nu undersøge problemet med et simpelt tælletræ. Med et tælletræ kan man tælle sig frem til sandsynligheden for et givet udfald af spillet. I hvert nyt kast er der mulighed for plat eller krone med samme sandsynlighed. Hvis det bliver krone stopper spillet. Ellers fortsætter det. Ethvert af de mulige udfald ender altså med en krone i sidste kast og for at finde sandsynligheden skal vi gange de enkelte sandsynligheder på vejen gennem træet sammen. Sandsynligheden for at få krone i 3. kast er således



ISBN 9788770668699

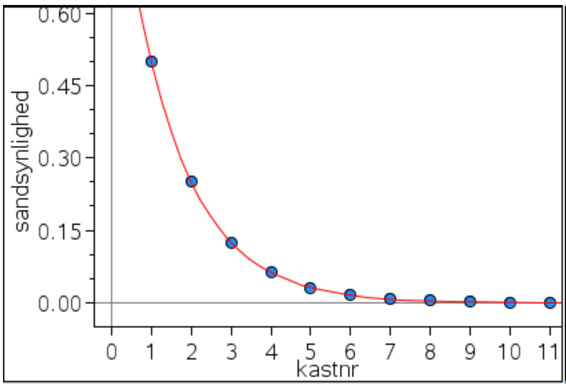
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

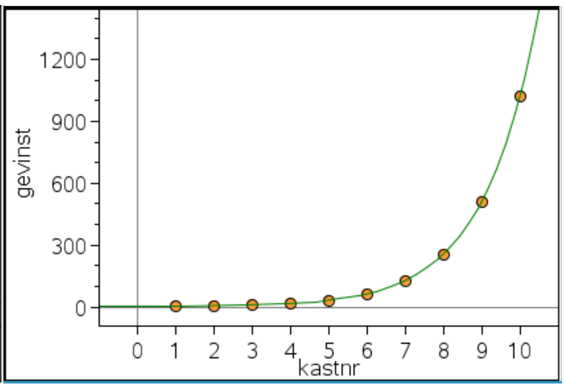
Forestiller vi os nu, at spilleren får plat i de første $n-1$ kast efterfulgt at krone i det n´te kast, så vil sandsynligheden for dette udfald være: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$, hvor n er et positivt helt tal.

Ser vi nu på gevinsterne, som fordobles, hver gang vi undgår at kaste krone, vil udviklingen være følgende:

Krone i kast nr.	Sandsynlighed	Gevinst i kr.
1	$\frac{1}{2}$	2
2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$	$2\cdot 2=2^2=4$
3	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$	$2\cdot 4=2\cdot 2^2=2^3=8$
4	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$	$2\cdot 8=2\cdot 2^3=2^4=16$
5	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$	$2\cdot 16=2\cdot 2^4=2^5=32$
…	…	…
n	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$	$2\cdot 2^{n-1}=2^n$
…	…	…

Ser vi på den grafiske repræsentation, så fremgår det måske endnu mere klart, at sandsynlighederne ret hurtigt bliver meget små, svarende til at gevinsterne ret hurtigt bliver meget store:





Hvis vi så udregner den forventede gevinst til spillet, så får vi følgende regnestykke:

$$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2^2+\frac{1}{8}\cdot 2^3+\frac{1}{16}\cdot 2^4+\frac{1}{32}\cdot 2^5+\ldots+\frac{1}{2^n}\cdot 2^n+\ldots=$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{1}{8}\cdot 8+\frac{1}{16}\cdot 16+\frac{1}{32}\cdot 32+\ldots+\frac{1}{2^n}\cdot 2^n+\ldots=$$

$$1+1+1+1+1+\ldots+1+\ldots$$

Denne række af 1-taller fortsætter jo i det uendelige, og ved at lægge tilstrækkeligt mange 1-taller sammen, så kan man opnå et tal, der er større end ethvert andet tal. Det er jo i sig selv indlysende, og derfor er den matematiske forventning til gevinsten for spillet en gennemsnitlig gevinst pr. spil på uendeligt mange kroner. Men så er en fair pris for dette spil en uendelig stor indsats! Men det betyder jo paradoksalt nok samtidigt, at ligegyldigt hvor stor en indsats spilleren tilbyder banken at spille for, så vil banken mene, det er for lidt! Med en forventning om uendelig rigdom – hvad skal da indsatsen være? Og kan et sådant spil overhovedet være fair? Giver det fx reelt nogen mening at udregne forventningsværdien:

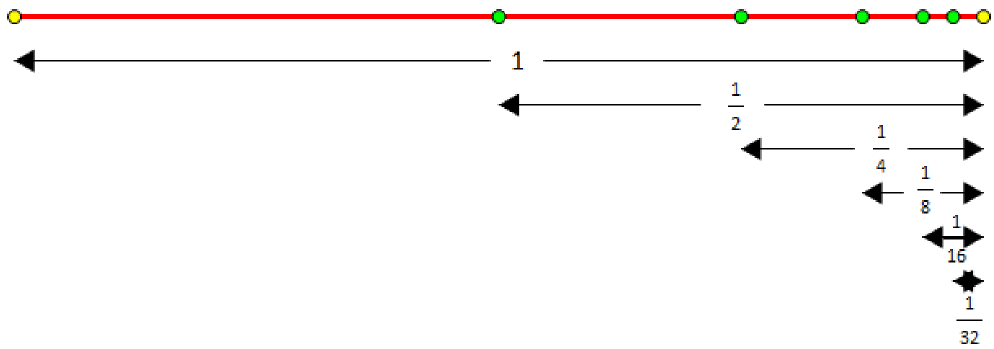
ISBN 9788770668699

$$E=\sum p_{\text{vinder}}\cdot \text{gevinst}-\text{indsats} \;=\infty-\infty=?$$

Lad os starte med at fastslå at det ikke som sådan er de uendeligt mange muligheder for at afslutte spillet, der er problemet. Fx kan vi nemt kontrollere at summen af sandsynlighederne er 1, sådan som vi må forvente det:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$$

Det fremgår fx af en figurbetragtning, hvor vi bliver ved med at halvere et linjestykke med længden 1. Summen af linjestykkerne vil da netop svare til hele linjestykket, hvilket netop er den ovenstående uendelige sum:



Hvis vi nu ændrede St. Petersborg spillet til at Banken betalte en krone mere, for hver gang udfaldet krone lod vente på sig, dvs. 1 krone, hvis spillet slutter efter første kast, 2 kroner, hvis spillet slutter efter andet kast, 3 kroner, hvis spillet slutter efter tredje kast osv.

Øvelse 5

a) Opstil et tælletræ som det ovenstående og finde såvel sandsynligheder som gevinster for hver af de mulige udfald af spillet: Krone efter første kast, krone efter andet kast, krone efter tredje kast osv.

b) Overfør tælletræet til et regneark og giv et skøn over den forventede gevinst, idet du inddrager fx op til 10 kast, op til 25 kast, op til 50 kast i dit skøn.

c) Hvad er en fair indsats i dette spil?

Et beslægtet spørgsmål til den forventede gevinst kunne nu være at finde det forventede antal kast. I halvdelen af spillene afsluttes spillet efter det første kast. I en fjerdedel af spillene afsluttes det efter andet kast. I en ottendedel af spillene afsluttes spillet efter det tredje kast osv. Det forventede antal kast er derfor givet ved

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 3+\frac{1}{16}\cdot 4+\ldots=?$$

Fra den foregående øvelse skulle du have en god fornemmelse for hvad summen er, men hvordan finder man den? Uendelige summer af denne type var netop noget man legede med blandt de samme matematikere, som diskuterede spillene så lidenskabeligt. Her er et typisk trick de kunne bruge til at udregne summen med:

$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 3+\frac{1}{16}\cdot 4+\ldots= \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots \\ \quad\;\;\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots \\ \quad\quad\quad\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots \\ \quad\quad\quad\quad\;\;\frac{1}{16}+\ldots \;= \end{array}$	De to kvarte skrives nedenunder hinanden, de tre ottendedele skrives nedenunder hinanden osv.

ISBN 9788770668699

$1 +$ $\frac{1}{2} +$ $\frac{1}{4} +$ $\frac{1}{8} + \ldots =$ $1 + 1 = 2$	Den første række giver som vi lige har set 1. I den anden række mangler $\frac{1}{2}$ så den giver kun $\frac{1}{2}$. I den tredje række mangler ydermere $\frac{1}{4}$, så den giver kun $\frac{1}{4}$ osv. Den samlede rækker er altså $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$, men det er netop 1+1, dvs. 2

Den forventede gevinst er altså kun 2 kr., hvorfor en fair indsats i dette tilfælde netop er 2 kr.

Men kan det virkelig betale sig at spille en uendelig stor indsats på et spil af St. Petersborg typen, hvor den forventede gevinst er uendeligt stor? Nej, det kan det naturligvis ikke! Uanset hvilket beløb, spilleren vinder, vil det være en begrænset sum penge – medmindre spillet fortsætter for evigt ved, at spilleren bliver ved med at slå plat, og i dette tilfælde vinder en uendelig sum penge, som han dog er nødt til at vente uendeligt lang tid på at få! Så det er altså dumt at betale en uendelig stor indsats for at spille!

Af ovenstående følger også, at lige meget hvor stor en endelig indsats, man vælger at gå ind i spillet med, så vil den altid være mindre end den gevinst, man kan forvente at opnå! Spillerens chance for at få en stor gevinst er selvfølgelig meget lille, men for nogle er gevinsten måske så stor, at det kompenserer for den lille chance, der er for succes.

Betragter vi spillet som et praktisk problem, så er de summer, der indgår begrænset af to faktorer, som den matematiske model slet ikke tager i betragtning:

- Den største gevinst, som banken rent faktisk kan betale
- Hvor lang tid der er til rådighed til at spille spillet - højst en menneskelig levetid.

Desuden foranlediger problemet nogle mere filosofiske overvejelser:

- Hvor rimelig er den matematiske forventningsværdi til gevinsten for spillet, når spilleperioden er langt længere end nogen spiller rent faktisk vil kunne spille i?
- Risikovurdering er meget mere nuanceret end den rene matematiske beregning af spillets forventede gevinst, og nuancerne i en sådan vurdering er særdeles vigtige når gevinsten (eller tabet) er meget stor, og sandsynligheden for gevinst er meget lille.

Øvelse 6

a) Opret i dit regneark en liste med de to udfald: {0 for”Plat” og 1 for ”Krone”}
b) Opret en liste med hundrede tilfældige møntkast trukket fra udfaldene – eller tusinde osv. I praksis er vi nødt til at afskære spillet til et endeligt antal gange når vi simulerer på det i et regneark.
c) Opret en liste hvor celle nr. n er summen af alle møntkast fra nr. 1 til nr. n. Overvej at antallet af nuller i denne liste netop giver det antal platter, der slås før den første krone!
d) Du kan nu finde ud af hvor mange kast det faktiske spil brugte ved at lægge 1 til antallet af platter i starten.
e) Gennemfør en simulering af spillet 1000 gange, idet du opsamler antallet af kast i hvert enkelt spil. Tegn et histogram over antallet af kast i de 1000 simuleringer. Hvad er det gennemsnitlige antal gange der kastes med mønten?
f) Samme spørgsmål for gevinsten!

ISBN 9788770668699

På **bogens website (link til filen Skt_Petersborg_Spil, i mappen projekt 9.7 - …)** kan du også hente en animation af St. Petersborg spillet.

Analyse af St. Petersborg spillet med loft over banken

Hvis man bliver tilbudt en fifty-fifty chance for at vinde 2 kr., så er chancen rimeligvis 1 kr. værd, svarende til halvdelen af de 2 kr. En indsats på 2 kr. vil være overkommelig for de fleste – man bliver ikke ruineret, og man er sikker på at banken faktisk kan betale gevinsten, hvis man vinder. En indsats på flere millioner ville ruinere de fleste og sandsynligvis også sprænge banken i tilfælde af gevinst!

Vi vil se på hvad spillet er værd for spilleren, når vi tager hensyn til, hvad banken rent faktisk kan betale.

Banken har jo ikke "uendeligt mange penge", og vi vil derfor antage, at banken har endeligt mange penge, nemlig 2^m kr. Ser vi nu igen på den matematiske forventning til spillet, så sker der det, at hvis spilleren først kaster krone i et senere spil end det m´te spil, så vil gevinsten ikke længere kunne fordobles, fordi banken jo ikke har flere penge end de 2^m kr., som er gevinsten ved krone i det m´te kast.

Den forventede gevinst kan da beregnes ved:

$$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{1}{8}\cdot 8+\frac{1}{16}\cdot 16+\frac{1}{32}\cdot 32+\ldots+\frac{1}{2^m}\cdot 2^m+\frac{1}{2^{m+1}}\cdot 2^m+\frac{1}{2^{m+2}}\cdot 2^m+\frac{1}{2^{m+3}}\cdot 2^m+\ldots=$$

$$\underbrace{1+1+1+1+1+\ldots+1}_{m\text{ gange}}+\frac{1}{2^{m+1}}\cdot 2^m+\frac{1}{2^{m+2}}\cdot 2^m+\frac{1}{2^{m+3}}\cdot 2^m+\ldots=$$

$$\underbrace{1+1+1+1+1+\ldots+1}_{m\text{ gange}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=$$

$$\underbrace{1+1+1+1+1+\ldots+1}_{m\text{ gange}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=$$

$$m+1$$

Det sidste lighedstegn fremkommer af, at vi jo ved, at $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$.

På denne måde bliver spillets værdi ikke "uendeligt mange penge", men i stedet netop $m+1$ kr. Opstiller vi en tabel over forskellige scenarier for bankens midler (bankens endelige mængde af penge) får vi:

m	Bankens midler i kr.	Spillets værdi for spilleren $= m+1$	m	Bankens midler i kr.	Spillets værdi for spilleren $= m+1$
0	$2^0=1$	1	10	$2^{10}=1024$	11
1	$2^1=2$	2	12	$2^{12}=4096$	13
2	$2^2=4$	3	14	$2^{14}=16384$	13
4	$2^4=16$	5	16	$2^{16}=65536$	17
6	$2^6=64$	7	30	$2^{30}=1073741824$	31
8	$2^8=256$	9	32	$2^{32}=4{,}3\cdot 10^9$	33

Dvs. i denne situation er svaret på det indledende spørgsmål, at det i almindelighed ved spil mellem venner vil være ret risikabelt at satse mere end 11 kr. på i dette spil, fordi ens venner nok kunne betale gevinsten på 1024 kr., men næppe ville være villig til at betale en gevinst på næsten 5000 kr. eller mere. Men forestiller vi os, at vi møder en professionel gambler, som nok ville være mindst 65000 kr. værd, så ville en indsats på 17 kr. nok være passende. En indsats på omkring 30 kr. er spillet mildest talt ikke værd i nogen sammenhæng, fordi hvilket Casino ville kunne udbetale en gevinst på over 1 mia. kr.?