ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse EGMONT

Projekt 9.10 Differentiation af potensfunktioner ved hjælp af binomialformlen

1. Pascals trekant og binomialformlen

Vi starter med at minde om at potenser af toleddede størrelser, de såkaldte binomer, kan udregnes ved hjælp af Pascals trekant, idet koefficienterne, når man har ganget parenteserne ud, netop stammer fra den tilsvarende række i Pascals trekant:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= 1\cdot a + 1\cdot b \\
(a+b)^2 &= 1\cdot a^2 + 2\cdot a\cdot b + 1\cdot b^2 \\
(a+b)^3 &= 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + 1\cdot b^3 \\
(a+b)^4 &= 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3\cdot b + 6\cdot a^2\cdot b^2 + 4\cdot a\cdot b^3 + 1\cdot b^4 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
\dots
\end{array}
$$

Begrundelsen er meget simpel: Når man udregner $(a+b)^n$, hvor eksponenten n er et naturligt tal, dvs. 1, 2, 3, 4, …, skal man gange n parenteser ud:

$$(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$$

Det gøres ved på alle mulige måder at vælge et led fra hver af parenteserne, dvs. enten et a eller et b, og gange dem sammen. Vælger vi fx a hver gang fås bidraget a^n, vælges et b den første gang og derefter et a de øvrige gange fås bidraget $b\cdot a^{n-1}$ osv. Da vi hver gang har netop 2 valg fås i alt 2^n bidrag, der til sidst samles som vist i skemaet ovenfor. Du kan læse mere om Pascals trekant i C-bogen side 240, kapitel 7 afsnit 1: Regning med tal og parenteser, samt B-bogen side 150, kapitel 3, afsnit 4.3: Polynomierne i Pascals trekant, side 348, kapitel 8, afsnit 2.1: Pascals trekant samt side 391, kapitel 9, afsnit 2.4: Tællemetoder og binomialkoefficienter.

Her noterer vi os blot at bidraget a^n kun fremkommer én gang. Bidraget $b\cdot a^{n-1}$ fremkommer n gange fordi leddet b kan vælges fra n forskellige parenteser. Bidraget $b^2\cdot a^{n-2}$ fremkommer $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ gange fordi det første b kan vælges på n måder, det andet b på n–1 måder og da rækkefølgen er ligegyldig har vi talt alle parrene med 2 gange, hvorfor vi dividerer med 2. Bidraget $b^3\cdot a^{n-3}$ fremkommer $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ gange fordi det første b kan vælges på n måder, det andet b på n–1 måder og det tredje b på n-2 måder, men da rækkefølgen er ligegyldig har vi talt alle triplerne med $3\cdot 2\cdot 1$ gange, hvorfor vi dividerer med $3\cdot 2\cdot 1$. Der gælder altså *binomialformlen*:

$$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \ldots + b^n$$

Øvelse 1:

a) Udpeg de tilsvarende koefficienter i Pascals trekant.

ISBN 9788770668699

2. Differentiation af potensfunktionen x^n, hvor *n* er et naturligt tal.

Når vi skal differentiere potensfunktionen $p(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ gange}}$ og ønsker at anvende tretrinsreglen i den anden version, starter vi med at opskrive *sekanthældningen*

1. trin:

$$\frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^n - {x_0}^n}{h}$$

Denne skal nu omskrives passende, men her kan vi jo anvende *binomialformlen*:

2. trin:

$$\begin{aligned}\frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h} &= \frac{(x_0+h)^n - {x_0}^n}{h} \\ &= \frac{\left(\cancel{{x_0}^n} + n\cdot {x_0}^{n-1}\cdot h + \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}\cdot {x_0}^{n-2}\cdot h^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot {x_0}^{n-3}\cdot h^3 + \ldots + h^n\right) - \cancel{{x_0}^n}}{h} \\ &= \frac{n\cdot {x_0}^{n-1}\cdot h + \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}\cdot {x_0}^{n-2}\cdot h^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot {x_0}^{n-3}\cdot h^3 + \ldots + h^n}{h} \\ &= n\cdot {x_0}^{n-1} + \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}\cdot {x_0}^{n-2}\cdot h + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot {x_0}^{n-3}\cdot h^2 + \ldots + h^{n-1}\end{aligned}$$

Til sidst skal vi lade tilvæksten *h* gå mod 0 og argumentere for hvad der sker under grænseovergangen:

3. trin:

$$\frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h} = n\cdot {x_0}^{n-1} + \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}\cdot {x_0}^{n-2}\cdot h + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot {x_0}^{n-3}\cdot h^2 + \ldots + h^{n-1}$$

Det første led afhænger ikke af *h*, dvs. det er konstant under grænseovergangen, mens de øvrige n–1 led indeholder stigende potenser af *h*, dvs. de går mod 0. Der gælder derfor:

$$\frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h} \to n\cdot {x_0}^{n-1} \quad \text{når} \quad h \to 0$$

Konklusion:

Altså er potensfunktionen $p(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ gange}}$ differentiabel i x_0 og der gælder $p'(x_0) = n\cdot {x_0}^{n-1}$.

Dette afslutter beviset i det tilfælde hvor eksponenten *n* er et naturligt tal.

ISBN 9788770668699

3. Differentiation af potensfunktionen x^a, hvor *a* er et vilkårligt tal.

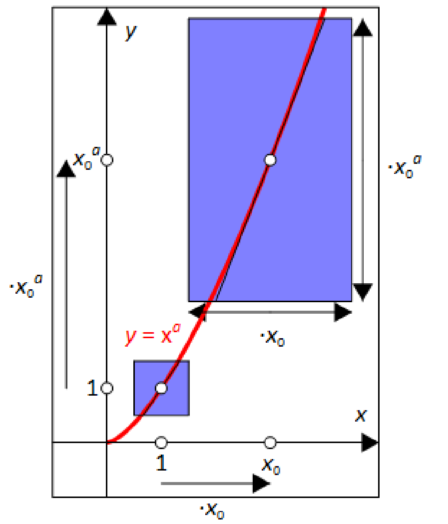
I *Hvad er matematik*? bind 2 har vi i kapitel 5B bevist formlen for differentiation af potensfunktioner. Beviset bygger på kendskab til differentiation af eksponentialfunktioner, samt på reglen for sammensat differentiation.

I matematikhistorien gav man andre beviser, og vi vil ger give – ikke et stringent bevis, men – en sandsynliggørelse af formlen ud fra geometriske betragtninger.

Først bemærker vi at grafen for potensfunktionen er skruet sammen på en speciel måde som vi beskrev i bind 1, kapitel 5, afsnit 4.1 om skalering (side 183):

> **Sætning 4: Skalering af potensfunktioner**
> Lad $y = b \cdot x^a$ være en potensfunktion. Så gælder følgende:
> Hvis den uafhængige variabel *x* skaleres op med faktoren *k*, så bliver den afhængige variabel *y* skaleret op med faktoren k^a.

Hvis den uafhængige variabel *x* har værdien 1 og skaleres op med tallet x_0 får den værdien x_0. Den afhængige variabel *y* vil da skaleres op med faktoren $x_0^{\ a}$. Dermed vil den lokale hældning $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ skaleres op med faktoren $x_0^{\ a-1}$, idet den lodrette tilvækst Δy bliver $x_0^{\ a}$ gange så stor, mens den vandrette tilvækst Δx bliver x_0 gange så stor. Den lokale hældning i x_0 er derfor $x_0^{\ a-1}$ gange så stor som den lokale hældning i 1.



Der gælder derfor den følgende simple sammenhæng mellem tangenthældningerne $p'(1)$ og $p'(x_0)$:

> **Sætning:**
> Hvis potensfunktionen $p(x) = x^a$ er differentiabel i *x* = 1 vil den også være differentiabel i x_0 og der gælder:
> $$p'(x_0) = p'(1) \cdot x_0^{\ a-1}$$

Vi mangler altså kun at vise at potensfunktionen er differentiabel i *x* = 1 og at den lokale hældning i 1 netop er *a*.

Skaleringsargumenter er så centrale for potensfunktioner at vi lige gentager det med brug af tretrinsreglen og udnyttelse af potensregnereglerne:

Når vi skal differentiere potensfunktionen $p(x) = x^a$ med brug af tretrinsreglen starter vi med at opskrive *sekanthældningen*

ISBN 9788770668699

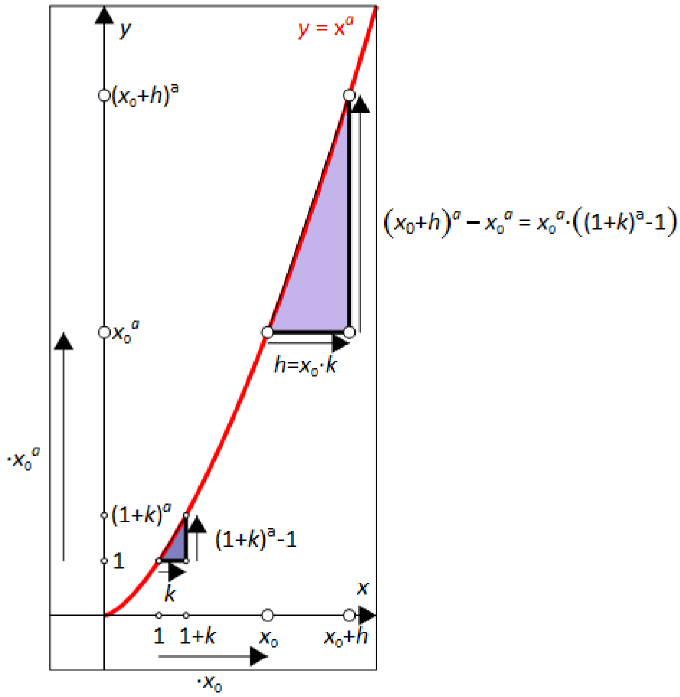
1. trin:

$$\frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^a-x_0{}^a}{h}$$

Denne skal nu omskrives passende, men her kan vi jo anvende *potensregnereglerne*. VI stiler nu mod at omskrive sekanthældningen i x_0 så den knyttes til sekanthældningen i 1:

2. trin:

$$\frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^a-x_0{}^a}{h}$$
$$=\frac{\left(x_0\cdot\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right)^a-x_0{}^a}{h}$$
$$=\frac{x_0{}^a\cdot\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^a-x_0{}^a}{h}$$
$$=x_0{}^a\cdot\frac{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^a-1}{h}$$
$$=\frac{x_0{}^a}{x_0}\cdot\frac{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^a-1}{\frac{h}{x_0}}$$
$$=x_0{}^{a-1}\cdot\frac{(1+k)^a-1}{k},\quad \text{med}\quad k=\frac{h}{x_0}$$



Men det viser netop at sekanthældningen i x_0 med tilvæksten *h* er den samme som $x_0{}^{a-1}$ ganget med sekanthældningen i 1 med tilvæksten *k*, hvor $h=x_0\cdot k$. Det er netop som forudsagt af skaleringsargumentet.

Til sidst skal vi lade tilvæksten *h* gå mod 0 og argumentere for hvad der sker under grænseovergangen. Men da tilvæksterne *h* og *k* er proportionale er det netop det samme som at lade *k* gå mod 0:

3. trin:

$$\frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h}=x_0{}^{a-1}\cdot\frac{(1+k)^a-1}{k}$$

Den første faktor afhænger ikke af *k*, dvs. den er konstant under grænseovergangen, mens den anden faktor netop er sekanthældningen i 1, som forudsat potensfunktionen er differentiabel i 1, netop går mod tangenthældningen. Der gælder derfor:

$$\frac{p(x_0+h)-p(x_0)}{h}\to x_0{}^{a-1}\cdot p'(1)\quad \text{når}\quad h\to 0$$

Konklusion: Altså er potensfunktionen $p(x)=x^a$ differentiabel i x_0 og der gælder $p'(x_0)=p'(1)\cdot x_0{}^{a-1}$.

4. Newtons argument - den uendelige binomialrække

Vi mangler så at argumentere for at potensfunktionen rent faktisk er differentiabel i 1 med differentialkvotienten *a*. Det første stærke argument for denne påstand stammer fra Newton og selv om det ikke er stringent nok til at fungere som et bevis i moderne forstand er det et uhyre centralt argument.

Newtons udgangspunkt var binomialformlen

$$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \ldots + b^n$$

Newton gættede på at formlen i virkeligheden gjaldt for alle eksponenter med den vigtige forskel at der i så fald bliver tale om en uendelig række idet koefficienterne

$$\frac{n}{1},\quad \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1},\quad \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1},\quad \ldots$$

Nu ikke længere automatisk bliver nul, når vi fortsætter længe nok, da n ikke længere behøver være et naturligt tal. Newton indførte altså den uendelige binomialrække:

$$(1+x)^a = 1 + a\cdot x + \frac{a\cdot(a-1)}{2\cdot 1}\cdot x^2 + \frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot x^3 + \ldots$$

Han vidste at formlen var korrekt når eksponenten *a* var et naturligt tal og rækken dermed en endelig sum, men han var også i stand til at kontrollere rækken for specielle værdier såsom *a* = -1 og *a* = ½,

Øvelse 2:

a) Opskriv binomialrækken for *a* = -1 og gør rede for at der netop fremkommer en *uendelig kvotientrække* på formen $b + b\cdot q + b\cdot q^2 + b\cdot q^3 + \ldots = \frac{b}{1-q}$, hvis sum du måske kender fx fra bog 1, kapitel 3, afsnit 4.1, s. 125.

b) Benyt dette til at argumentere for at Newtons uendelige binomialrække giver det korrekte resultat for *a* = -1, når blot *x* ligger mellem -1 og 1.

Men Newton kunne jo ikke vide om hans formel var gyldig i alle mulige andre tilfælde. Han gjorde da en dyd af nødvendigheden og vendte problemstillingen om: Han brugte i stedet formlen for den uendelige binomialrække til at *definere* vilkårlige potenser. Så længe x ligger mellem -1 og 1 vil den uendelige række nemlig kunne bruges til at udregne potensen $(1+x)^a$ med lige så mange decimaler man måtte ønske det ved blot at tage tilstrækkeligt mange led med. For andre værdier af x må man benytte snedige skaleringer til at finde værdien. Det var Newtons kollega Wallis, der havde indført brugen af de generelle potenser og det var Newton, der i praksis viste hvordan de kunne udregnes og dermed gav dem substans.

Tror vi på Newtons binomialformel, kan vi nu anvende tretrinsreglen for at finde ud af om potensfunktionen $p(x) = x^a$ er differentiabel i 1 (Newton selv anvendte fluxionsmetoden i stedet for tretrinsreglen, men argumentet er det samme):

ISBN 9788770668699

Vi starter altså med at opskrive *sekanthældningen*

1. trin:

$$\frac{p(1+k)-p(1)}{k}=\frac{(1+k)^a-1}{k}$$

Denne skal nu omskrives passende, men her kan vi jo anvende *binomialrækken*:

2. trin:

$$\begin{aligned}\frac{p(1+k)-p(1)}{k}&=\frac{(1+k)^a-1}{k}\\&=\frac{\left(\cancel{1}+a\cdot k+\frac{a\cdot(a-1)}{2\cdot 1}\cdot k^2+\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot k^3+\ldots\right)-\cancel{1}}{k}\\&=\frac{a\cdot k+\frac{a\cdot(a-1)}{2\cdot 1}\cdot k^2+\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot k^3+\ldots}{k}\\&=a+\frac{a\cdot(a-1)}{2\cdot 1}\cdot k+\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot k^2+\ldots\end{aligned}$$

Til sidst skal vi lade tilvæksten *k* gå mod 0 og argumentere for hvad der sker under grænseovergangen:

3. trin:

$$\frac{p(1+k)-p(1)}{k}=a+\frac{a\cdot(a-1)}{2\cdot 1}\cdot k+\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot k^2+\ldots$$

Det første led afhænger ikke af *k*, dvs. det er konstant under grænseovergangen, mens de øvrige led indeholder stigende potenser af *k*, dvs. de går mod 0. Newton sluttede derfor at alle de uendeligt mange øvrige led forsvandt:

$$\frac{p(1+k)-p(1)}{k}\to a \quad \text{når} \quad k\to 0$$

I dag er vi lidt mere forsigtige med den slags slutninger! En uendelig sum behøver ikke gå mod nul bare fordi alle leddene går mod nul. Det er fx kernen i integralregningen, hvor arealet findes som grænseværdien for en uendelig sum af små arealer, der hver for sig går mod nul. Men der skulle gå et par århundreder før man for alvor fik styr på sådanne argumenter!

Konklusion:
Altså er potensfunktionen $p(x)=x^a$ differentiabel i 1 og der gælder $p'(1)=a$. Dermed gælder der alt i alt:
Potensfunktionen $p(x)=x^a$ er differentiabel i x_0 og der gælder $p'(x_0)=a\cdot x_0^{a-1}$.

Dermed har vi også givet et argument for formlen i det tilfælde hvor eksponenten *a* er et vilkårligt tal. Det stringente bevis er som sagt givet i grundbogens kapitel 5B.