ISBN 9788770668699

Projekt 8.12 Newton Raphsons metode – og hvorfor den virker

(*Første del af dette afsnit er en lettere redigeret version af afsnittet fra Hvad er matematik? 2, kapitel 8, 'Numeriske metoder og algoritmer', s. 329-331. Dette giver os en stærk intuition om, at metoden må virke – og at den er effektiv. Anden del giver en begrundelse fr at den virker, ved at oversætte problemet til et, der kan behandles i teorien for iteration og kaos.*)

1. Newton Raphsons metode

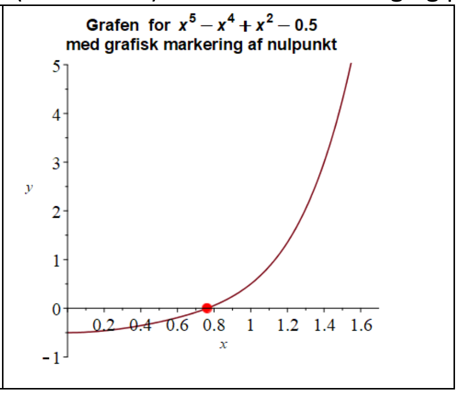
Udvikling af metoder til ligningsløsning har været en vigtig del af matematikken siden oldtiden. Med udviklingen af differentialregningen opstod nye muligheder. Den metode, vi her omtaler, blev udviklet nogenlunde samtidig og uafhængigt af hinanden af Newton og hans samtidige Joseph Raphson (1648-1712). Den er både hurtig og præcis.

Lad os illustrere metoden med et eksempel. Man vil undervejs se, at metoden har generel karakter.

Betragt polynomiet $p(x)=x^5-x^4+x^2-0.5$. Vi tegner grafen for at få en fornemmelse af funktionens nulpunkter.

Ideen i Newton-Raphsons metode er nu, at vi starter med et "gæt" på et nulpunkt relativ tæt på det røde nulpunkt. Vi vælger $x=1.5$, hvorved vi bedre kan få en tegning der viser metoden.

1. trin: Vi bestemmer punktet $(1.5, f(1.5))$, og lægger en tangent $t_1(x)$ til grafen i dette punkt. Denne tangent vil skære x-aksen.



Fra sætning 16 i kapitel 5A har vi en forskrift for tangenten:

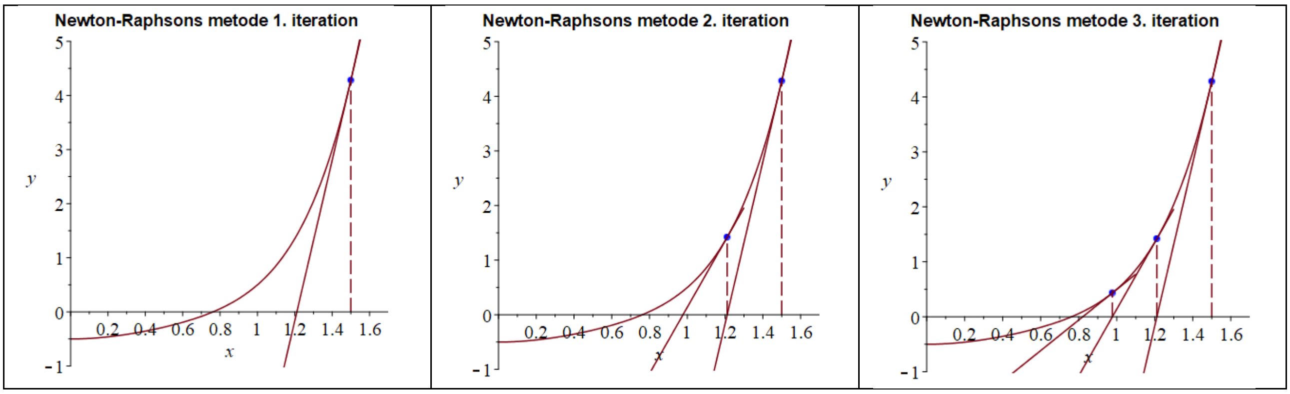
$$t_1(x)=p(x_0)+p'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Denne anvendes nu til at bestemme en formel for tangentens skæring med x-aksen – det er blot de almindelige regler for ligningsløsning vi her bruger:

$$0=p(x_0)+p'(x_0)\cdot(x-x_0)$$
$$-p(x_0)=p'(x_0)\cdot(x-x_0)$$
$$-\frac{p(x_0)}{p'(x_0)}=(x-x_0)$$
$$x=x_0-\frac{p(x_0)}{p'(x_0)}$$

Vi må naturligvis ikke dividere med 0, så udregningerne kan ikke altid gennemføres.
Hvad svarer situationen $p'(x_0)=0$ til rent grafisk?
Dette betyder, at der er tilfælde, hvor metoden ikke kan anvendes.

Vi har nu en formel for en tangents skæring med x-aksen. Ved at indsætte startværdien x_0 får vi den næste værdi: $x_1=1.210970$. Med x_1 kan vi gentage processen, bestemme en tangent og opsøge skæringspunktet med x-aksen:



ISBN 9788770668699

Øvelse 1. Kør Newton-Raphson

a) Bestem tangenten $t_1(x) = p(x_0) + p'(x_0) \cdot (x - x_0)$ og beregn selv $x_1 = x_0 - \dfrac{p(x_0)}{p'(x_0)}$

b) Udnyt punktet x_1 til at bestemme x_2 osv. Du skal få følgende række af tal:

$x_0 = 1.5$	$x_1 = 1.210970$	$x_2 = .9770493$	$x_3 = .8210262$	$x_4 = .7664689$	$x_5 = .7617505$

c) Hvis vi bestemmer nulpunktet med en solve-facilitet, får vi $x_* = 0.7617200$. Hvor mange gange skal vi køre NR, før det tilnærmede nulpunkt er korrekt med 7 decimaler.

Øvelse 2.

Lad $p(x) = x^3 - 3x + 1$.

a) Tegn grafen i intervallet $[-2.5;2.5]$.

Du skal fået grafisk billede, der viser, at $p(x)$ har tre nulpunkter.

b) Definer NR-funktionen: $p_{NR}(x) := x - \dfrac{p(x)}{p'(x)}$.

c) For hvert af de tre nulpunkter skal du ved hjælp af grafen vælge en x-værdi tæt ved nulpunktet som begyndelsesværdi, og så køre Newton-Raphson ud fra dette og med $p_{NR}(x)$.

(*Du skal få nulpunkterne: 0.347296, 1.532089, -1.879385*)

Newton-Raphsons algoritme er let at implementere, da det er en simpel iterationsproces, dvs en proces hvor det samme gentages igen og igen: Tegn en tangent i et punkt på grafen, opsøg tangentens skæring med 1.-aksen, bestem punktet på grafen lodret over denne x-værdi, tegn en tangent i det nye punkt på grafen, opsøg ...
Der findes naturligvis en række andre algoritmer til at bestemme nulpunkter, også nogle der er betydeligt mere effektive. Men de er til gengæld også ganske komplicerede. Newton-Raphson er forbløffende effektiv i betragtning af, hvor simpel den er.

2. Newton Raphsons algoritme skaber et supertiltrækkende fixpunkt

Vi kan indse, hvorfor Newtons nulpunktsmetode er så effektiv, ved hjælp af resultater fra *Teorien om iteration og kaos*! Dette er udførligt behandlet i **projekt 0.4: Iteration og Kaos.**

Vi har brug for enkelte begreber herfra:

Definition 1: Fixpunkt
Givet en vilkårlig funktion *f*. Et punkt x^*, der opfylder:
$$f(x^*) = x^*$$
kaldes for et fixpunkt for funktionen.

Definition 2. Tiltrækkende og frastødende fixpunkter
Et fixpunkt x* kaldes et *tiltrækkende fixpunkt*, hvis der findes et interval *I* om x*, så det for enhver følge $\{x_{n+1} = g(x_n)\}$ gælder, at lander bare èt af x_n'erne i intervallet, så vil følgen konvergere mod x*. (Billedligt suges følgen ind til x* når vi kommer for tæt på - som et sort hul!).
Et fixpunkt kaldes *frastødende*, hvis der findes et interval *I*, så hver gang et x_n fra en sådan følge falder inde i intervallet, så vil det næste i rækken blive skubbet længere bort fra x*. (Billedligt som når vi nærmer to nordpoler til hinanden).

Overbevis dig selv om, at den geometriske betydning af fixpunkter er, at disse optræder, hvor grafen skærer linjen $y = x$.

Vi beviser i projekt 0.4, at der gælder:

Sætning 1. Betingelsen for om et punkt er frastødende eller tiltrækkende
Lad x^* være et fixpunkt for den differentiable funktion *g*. Så gælder:

1. x^* er et tiltrækkende fixpunkt for g, hvis $\left|g'(x^*)\right| < 1$
2. x^* er et frastødende fixpunkt for g, hvis $\left|g'(x^*)\right| > 1$.

Vi indfører følgende:

Betegnelser:
Lad x^* være et fixpunkt for den differentiable funktion *g*.

- Hvis $\left|g'(x^*)\right| = 1$ kaldes x^* for et neutralt fixpunkt.
- Hvis $\left|g'(x^*)\right| = 0$ kaldes x^* for et supertiltrækkende fixpunkt.

Prøv selv at tegne situationerne, for at se, at betegnelserne er rimelige. Tjek evt ved at se i projekt 0.4

Vi ser nu, hvorledes kaosteorien kan hjælpe os til at forstå, hvor Newton Raphsons metode er så effektiv.
Vi tager det i to skridt:

Sætning 2. Nulpunkter for *f* svarer til fixpunkter for Newton Raphsons iterationsfunktion.
1. Givet en differentiabel funktion *f* og et tal x^*, hvorom der gælder, at $f'(x^*) \neq 0$, og at x^* er fixpunkt for funktionen $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Så gælder, at x^* er et nulpunkt for *f*.
2. Givet en differentiabel funktion *f*. Antag *f* har nulpunkt i x^*, og at $f'(x^*) \neq 0$
Så gælder, at x^* er et fixpunkt for funktionen $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Bevis.
1. Antag, at x^* er fixpunkt for funktionen $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Så får vi:

$$g(x^*) = x^*$$
$$x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} = x^*$$
$$-\frac{f(x^*)}{f'(x^*)} = 0$$
$$f(x^*) = 0$$

Altså er x^* nulpunkt for *f*.

2. Antag *f* har nulpunkt i x^*, og at $f'(x^*) \neq 0$.
Vi ved altså, at $f(x^*) = 0$. Inspireret af punkt 1 foretager vi nu følgende omskrivning, der er den samme som ovenfor, blot den modsatte vej:

ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse EGMONT

$$f(x^*)=0$$
$$\frac{f(x^*)}{f'(x^*)}=0 \quad \text{(divisionen er tilladt, da } f'(x^*)\neq 0)$$
$$x^*-\frac{f(x^*)}{f'(x^*)}=x^*$$
$$g(x^*)=x^*$$

Altså er x^* et fixpunkt for g.

Ud fra sætning 2 får vi nu selve sætningen om effektiviteten i Newtons metode:

Sætning 3. Nulpunkter for *f* svarer til supertiltrækkende fixpunkter for Newton Raphsons iterationsfunktion.

Givet en flere gange differentiabel funktion *f*. Antag, at x^* er nulpunkt for *f*, og at $f'(x^*)\neq 0$.

Så gælder, at x^* er et supertiltrækkende fixpunkt for funktionen $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Øvelse 3. En grafisk fremstilling af et supertiltrækkende fixpunkt

Tegn med fri hånd på et papir grafen for en funktion $h(x)$, som har et fixpunkt, dvs. grafen skærer linjen $y=x$ i et punkt. Tegn et eksempel, hvor tangenthældningen i dette punkt er 0. Hent projekt 0.4, og anvend den metode der er beskrevet i afsnit 6 heri om *grafisk iteration*. Så vil du se, at vælges startpunktet ikke for langt væk fra dette fixpunkt, så er det som om iterationsfølgen øjeblikkeligt suges ind i fixpunktet.

Bevis for sætning 3.

Vi skal vise, at $g'(x^*)=0$. Så derfor udregner vi simpelthen $g'(x^*)$. Hvis man kender brøkreglen for differentiation, kan man anvende den. Ellers kan man omskrive til et produkt og bruge produktreglen. Vi gør det sidste:
Omskrivning:

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-f(x)\cdot\frac{1}{f'(x)}=x-f(x)\cdot\left(f'(x)\right)^{-1}$$

Øvelse 4. Gør rede for omskrivningerne

Du skal nøje gøre rede for hvert trin i følgende omskrivninger, specielt hvilke regneregler fra differentialregningen vi anvender. Udregning af den afledede funktion:

Udregningen trin for trin		Hvilke regler anvendes i de enkelte trin
$\left(g(x)\right)'=\left(x-f(x)\cdot\left(f'(x)\right)^{-1}\right)'$	(1)	
$=\left(x\right)'-\left(f(x)\cdot\left(f'(x)\right)^{-1}\right)'$	(2)	
$=1-\left(f'(x)\cdot\left(f'(x)\right)^{-1}+f(x)\cdot(-1)\cdot\left(f'(x)\right)^{-2}\cdot\left(f''(x)\right)\right)$	(3)	
$=1-1+f(x)\cdot\left(f'(x)\right)^{-2}\cdot f''(x)$	(4)	
$=f(x)\cdot\dfrac{1}{\left(f'(x)\right)^{2}}\cdot f''(x)$	(5)	
$=\dfrac{f(x)\cdot f''(x)}{\left(f'(x)\right)^{2}}$	(6)	

ISBN 9788770668699

Heraf kan vi nu let se: Hvis x^* er et nulpunkt for *f*, dvs $f(x^*)=0$ så er $g'(x^*)=0$, dvs, at så er x* et supertiltrækkende fixpunkt.

Bemærkning. Vi har dermed *bevist*, at Newtons nulpunktsbestemmelse virker. Den iterationsfølge vi laver vil konvergere (hurtigt) mod nulpunktet x^*, hvis vi starter rigtigt. Af beviset fremgik, at vi startede med at vælge et bestemt interval *J* om x^*. Derefter så vi, at hvis blot ét punkt landede i dette interval, ville følgen hurtigt zoome ind i nulpunktet. Det betyder jo også, at hvis vi vælger vores startværdi indenfor intervallet, så konvergerer følgen (hurtigt!).
Vi kunne godt give os til at regne på, hvordan dette interval *J* skal være, når vi har en given funktion. Men det er alt for besværligt. Vi er tilfredse med den teoretiske indsigt, vores sætning giver. I praksis vil vi blot vælge en startværdi "tæt" på x^* og således, at $f'(x^*)$ ikke bliver 0 i nærheden.