Additionsformlerne og de logaritmiske formler

(*Har man gennemgået vektorregning, kan afsnit 2 og 3 springes over*)

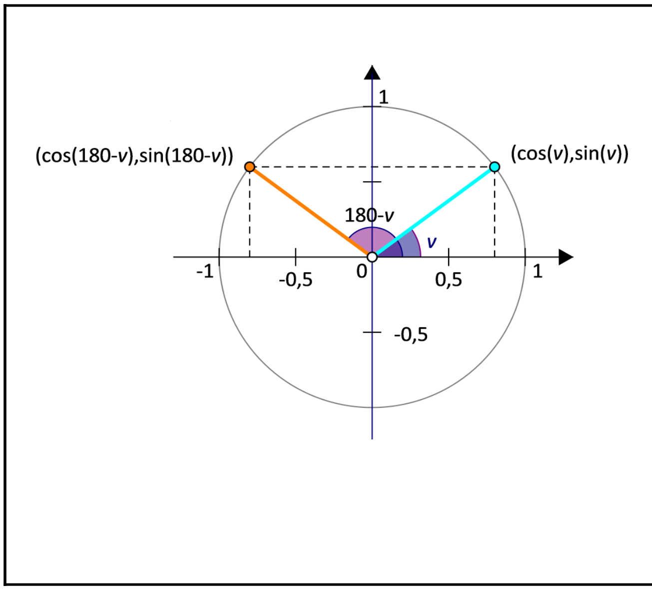
1. Additionsformlerne siger:

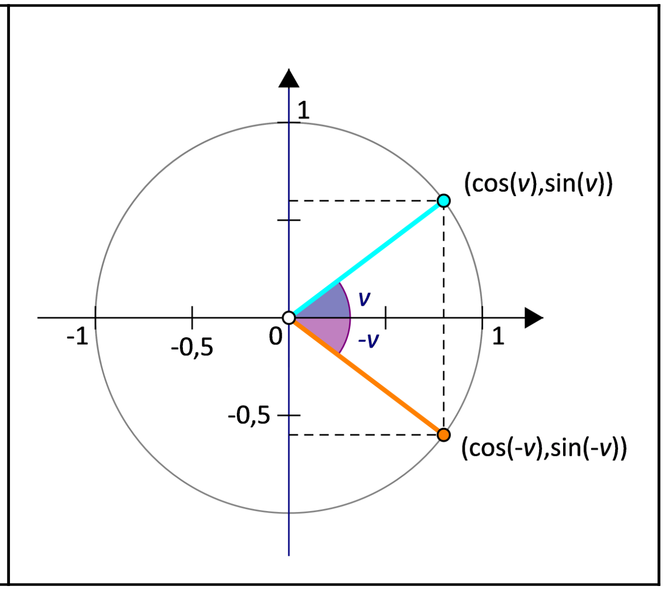
A1) $\cos(s-t) = \cos(s)\cdot\cos(t) + \sin(s)\cdot\sin(t)$
A2) $\cos(s+t) = \cos(s)\cdot\cos(t) - \sin(s)\cdot\sin(t)$
A3) $\sin(s-t) = \sin(s)\cdot\cos(t) - \cos(s)\cdot\sin(t)$
A4) $\sin(s+t) = \sin(s)\cdot\cos(t) + \cos(s)\cdot\sin(t)$

Beviset for formlerne bygger dels på **vektorregning**, dels på viden om de såkaldte **overgangsformler**.
Beviserne for overgangsformlerne bygger på betragtning af **enhedscirklen**

Overgangsformlerne er mange, men nogle af de vigtigste er:

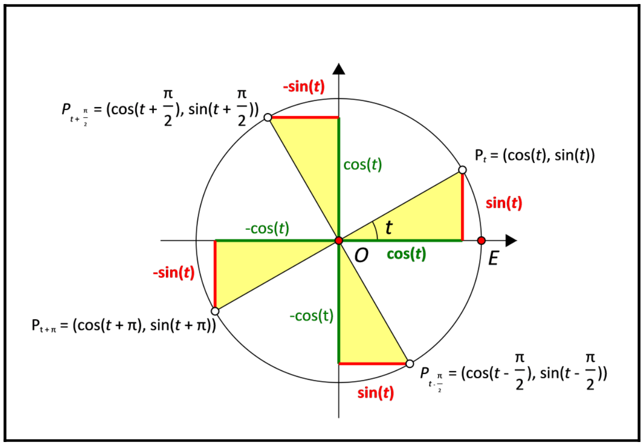
O1) $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ og $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, eller: $\cos(180 - t) = -\cos(t)$ og $\sin(180 - t) = \sin(t)$
O2) $\cos(-t) = \cos(t)$ og $\sin(-t) = -\sin(t)$
Argumenter for formlerne ud fra følgende tegninger:





O3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$ og $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$, eller: $\cos(90 - t) = \sin(t)$ og $\sin(90 - t) = \cos(t)$
O4) $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(t)$ og $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(t)$, eller: $\cos(t - 90) = \sin(t)$ og $\sin(t - 90) = -\cos(t)$
O5) $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(t)$ og $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(t)$, eller: $\cos(t + 90) = -\sin(t)$ og $\sin(t + 90) = \cos(t)$
O6) $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ og $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$, eller: $\cos(t + 180) = -\cos(t)$ og

$\sin(t+180) = -\sin(t)$
Argumenter for formlerne ud fra følgende tegning



2. Vektorregning, basic

(*Dette kan overspringes, hvis man har gennemgået vektorregning*)
Vektorregning er gennemgået i *Hvad er matematik*?, bind 1, kapitel 6, og bind 2, kapitel 7.
En vektor er en pil med en vis længde og en bestemt retning. Vi tænker på pilen som repræserntatnt for en kraft eller en hastighed.
En vektor kan afsættes og tegnes hvor som helst - pile med samme retning og længe opfatter vi som samme vektor selv om de er tegnet forskellige steder.

Vektorer kan adderes ($\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$) ved at vi afsætter dem i forlængelse af hinanden og dernæst tegner en pil fra start til slut. Men for vores brug nu har vi først og fremmest brug for koordinater:
En vektor kan vi tegne ud fra koordinatsystemets begyndesespunkt (origo), Vektorens pilespids P er da et punkt med koordinater x1 og y1. Dette er så også vektorens koordinater - **vi kalder vektorer afsat fra (0,0) for stedvektorer**:

$$\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{x1}, \boldsymbol{y1} \rangle \qquad v = \begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix}$$

mens vi skriver: $P = (x1, y1)$
Vektorer skrives normalt med koordinaterne lodret (anvend < , >), mens punkternes kordnater skrives vandret

En **vektors koordinater** er længden af dens projektion ned på henh. x - og y-aksen.

Vektorer **adderes** eller **ganges med tal** koordinatvis:
Hvis $\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{x1}, \boldsymbol{y1} \rangle$ og $\boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{x2}, \boldsymbol{y2} \rangle$ og k er et tal, så har vi:

$$\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x2 \\ y2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x1 + x2 \\ y1 + y2 \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot x1 \\ k \cdot y1 \end{bmatrix}$$

(Se *Hvad er matematik*? 1, s 201 - 204)

En vektors længde er længden af en repræsentant, og den beregnes ved Pythagoras (Se *Hvad er matematik*? 1, s 206-211)

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x1^2 + y1^2}$

Givet to vektorer, så har vi en helt særlig operation på dem, som vi kalder **skalarprodukt eller prikprodukt,** og som kan anvendes til at bestemme vinkler mellem dem. I Maple kaldes kommandoen dotP:

Skalarproduktet af vektorerne **a=** $\langle a1, a2\rangle = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix}$ og **b=** $\langle b1, b2\rangle = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \end{bmatrix}$ er defineret som:

$$a \cdot b = dotP\left(\begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \end{bmatrix}\right) \qquad a\ b = a1\ b1 + a2\ b2$$

Vi lægger nu mærke til, at:

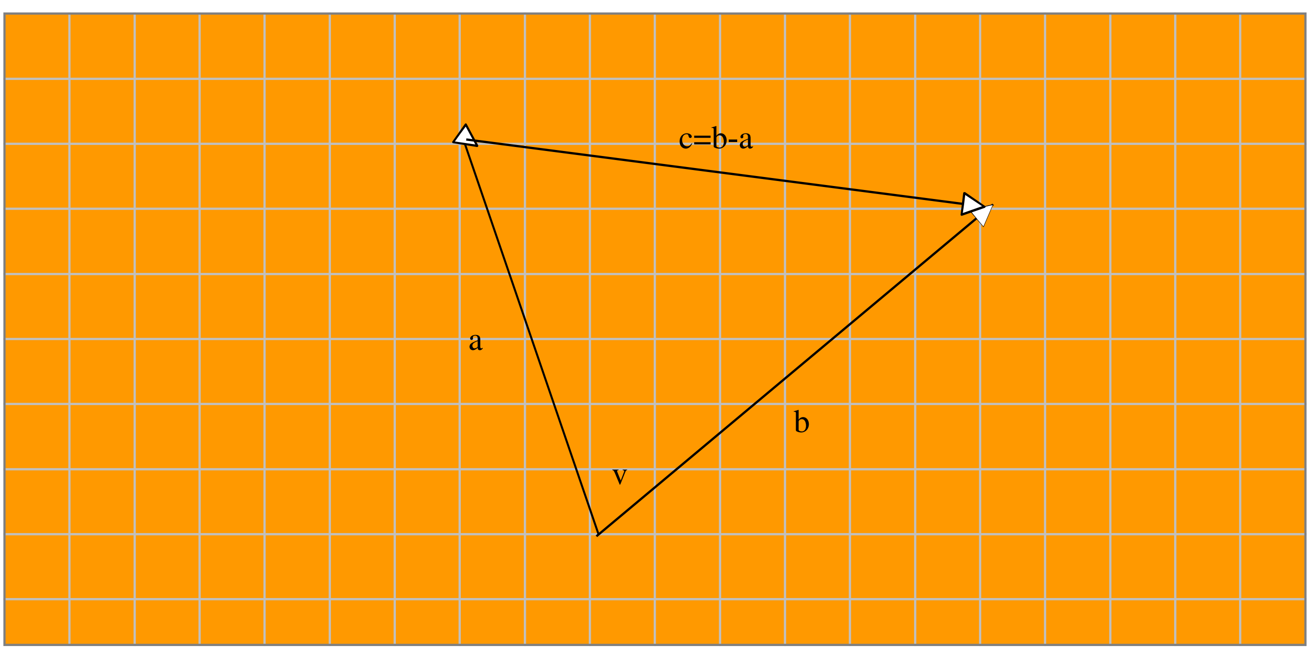
$$a \cdot a = dotP\left(\begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix}\right) \qquad a^2 = a1^2 + a2^2$$

Men vektorens længde fandt vi ovenfor til at være $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a1^2 + a2^2}$, dvs $|\boldsymbol{a}|^2 = a1^2 + a2^2$

Dvs prikproduktetn af en vektor med sig selv, er lig længden af vektoren i anden

3. Formlen for prikdukt med indragelse af vinklen mellem vektorerne

Givet to vektorer, **a** og **b** der afsættes ud fra samme punkt. Vi tegner selv en vektor mellem de to pilespidser, så situationen er således:



At vektoren mellem de to spidser er c=b-a ses af følgende smple ligning:
a+c=b giver: **c=b-a**

For et prikprodukt gælder alle de sædvanlige regneregler, fx mht at gange ind i en parentes, (se *Hvad er matematik*? 1, s 220-222)
Det betyder at sådanne formler som kvadratsætninger også er til rådighed for vektorer, fx:

$(b-a)^2 \overset{\text{expand}}{=} a^2 - 2\,a\,b + b^2$ (hvor $a \cdot b$ er skarprtoduktet.)

Men det betyder at:

$|b-a|^2 = a^2 - 2\,a \cdot b + b^2$ (hvorfor)

Trekanten kan vi også regne på som en almindelig trekant, og anvende cosinusrelationerne:

$|c|^2 = |b-a|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2 \cdot |a| \cdot |b| \cdot \cos(\mathit{vinklen\ mellem\ dem})$

Men så er

$a^2 - 2\,a\,b + b^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2 \cdot |a| \cdot |b| \cdot \cos(v)$

Reducer (overvej, hvad der sker):
$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(\mathit{vinklen})$, hvor venstre side er **prikproduktet**.
Dvs vi har formlen for sammenhængen mellem prikprodukt og cos til vinklen v imellem:

$\boldsymbol{a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos}(v)$

4. Bevis for additionsformlerne

Formel nr A1: $\mathbf{\cos}(s-t) = \mathbf{\cos}(s) \cdot \mathbf{\cos}(t) + \mathbf{\sin}(s) \cdot \mathbf{\sin}(t)$
Tegn enhedscirklen og afsæt heri to vektorer, **a og b** fra (0,0) og ud til randen. Den ene vektor har vinklen t ned til 1.aksen, den anden har vinklen s, og lad os antage s er størst. Vinklen mellem de to er så s-t.
Vektorerne har koordinaterne:

$a = \langle \cos(t), \sin(t) \rangle$

$$a = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

$b = \langle \cos(s), \sin(s) \rangle$

$$b = \begin{bmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Indsæt de to vektoretr i $\boldsymbol{a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos}(v)$:

Venstre side:

$$\boldsymbol{a \cdot b = dotP}\left(\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{bmatrix} \right) = \cos(t)\,\cos(s) + \sin(t)\,\sin(s)$$

Højre side: $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\mathbf{cos}(v) = 1\cdot 1\cdot\cos(s-t)$

Heraf får vi den ene af additionsformlerne: $\cos(s-t) = \cos(t)\ \cos(s) + \sin(t)\ \sin(s)$

Formel nr A2: $\mathbf{cos}(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}) = \mathbf{cos}(\boldsymbol{s})\cdot\mathbf{cos}(\boldsymbol{t}) - \mathbf{sin}(\boldsymbol{s})\cdot\mathbf{sin}(\boldsymbol{t})$

Tegn enhedscirklen og afsæt heri to vektorer, **a og b** fra (0,0) og ud til randen. Den ene vektor har vinklen t ned til 1.aksen, afsæt den anden med vinklen s, drejet med uret, dvs mod omløbsretningen. Vinklen regnet med fortegn er da $-s$. Vinklen mellem de to er så $s+t$.

Argumenter for, at $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \cos(t)\ \cos(s) - \sin(t)\ \sin(s)$
(Hint: anvend formel O2)

Argumenter nu for formel A2: $\cos(s+t) = \cos(s)\cdot\cos(t) - \sin(s)\cdot\sin(t)$

Formel nr A3: $\mathbf{sin}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}) = \mathbf{sin}(\boldsymbol{s})\cdot\mathbf{cos}(\boldsymbol{t}) - \mathbf{cos}(\boldsymbol{s})\cdot\mathbf{sin}(\boldsymbol{t})$

Udnyt O3 til at omskrive:

$$\sin(s-t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (s-t)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - s\right) + t\right)$$

Udnyt A2 ti at omskrive:

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - s\right) + t\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right)\cdot\cos(t) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right)\cdot\sin(t) = \sin(s)\cdot\cos(t) - \cos(s)\cdot\sin(t)$$

Konkluder!

Formel nr A4: $\mathbf{sin}(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}) = \mathbf{sin}(\boldsymbol{s})\cdot\mathbf{cos}(\boldsymbol{t}) + \mathbf{cos}(\boldsymbol{s})\cdot\mathbf{sin}(\boldsymbol{t})$

Øvelse.
Bevis A4 efter samme metode som A3.

5. De logaritmiske formler

De logaritmiske formler kan fås ud af additionsformlerne. Mest interesse har de formler, der kaldes de anti-logaritmiske formler, idet de oversætter et produkt til en sum. Den egenskab betød, at disse formler blev vidt anvendt - blandt andet i Tycho Brahes videnskabelige miljø på Hveen - før opåfindelsen af de egentlige logaritmer. De var centrale i den såkaldte prostaphaeresis metode. Du kan læse herom i projekt 8.13 i bind 1.

1. Adder de to første identiteter, A1 og A2:

$$A1)\ \cos(s-t) = \cos(s)\cdot\cos(t) + \sin(s)\cdot\sin(t)$$
$$A2)\ \cos(s+t) = \cos(s)\cdot\cos(t) - \sin(s)\cdot\sin(t)$$

Vi får: $\cos(s-t)+\cos(s+t)=2\cdot\cos(s)\cdot\cos(t)$
hvoraf:

L1) $\cos(s)\cdot\cos(t)=\dfrac{\cos(s-t)+\cos(s+t)}{2}$

2. Udled tilsvarende en formel, hvor vi anvender sinus i stedet for cosinus i omskrivning fra produkt til sum.