

Eksempel: Skæring mellem linje (parameterfremstilling) og cirkel (ligning)

En linje l er givet ved parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

og en cirkel er givet ved ligningen

$$c: (x-5)^2 + (y-7)^2 = 5^2$$

Vi vil bestemme eventuelle skæringspunkter mellem linjen og cirklen.

Metode 1: Håndregning og substitution

Koordinatsættene for l :

$$x = -3 + 8 \cdot t$$

$$y = 1 + 6 \cdot t$$

indsættes i cirkelns ligning:

$$((-3 + 8 \cdot t) - 5)^2 + ((1 + 6 \cdot t) - 7)^2 = 5^2$$

$$(-8 + 8 \cdot t)^2 + (-6 + 6 \cdot t)^2 = 25$$

Hæver parenteser og reducerer

$$64 + 64 \cdot t^2 - 128 \cdot t + 36 + 36 \cdot t^2 - 72 \cdot t = 25$$

Anvender kvadratsætning

$$100 \cdot t^2 - 200 \cdot t + 75 = 0$$

Reducerer

$$4 \cdot t^2 - 8 \cdot t + 3 = 0$$

Forkorter med 25

Vi løser andengradsligningen med løsningsformlen, hvor diskriminanten er:

$$d = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 64 - 48 = 16 > 0$$

dvs. der er to løsninger – altså skærer linjen cirklen to steder.

Vi bestemmer parameterværdien t i skæringspunkterne:

$$t = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 4}{8} \quad \text{dvs. } t = \frac{1}{2} \text{ eller } t = \frac{3}{2}$$

Vi bestemmer koordinatsættet ved indsættelse af de fundne parameterværdier i parameterfremstillingen for l :

$$\text{For } t = \frac{1}{2} \text{ får vi } \begin{aligned} x &= -3 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ y &= 1 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{For } t = \frac{3}{2} \text{ får vi } \begin{aligned} x &= -3 + 8 \cdot \frac{3}{2} = 9 \\ y &= 1 + 6 \cdot \frac{3}{2} = 10 \end{aligned}$$

Konklusion: Linjen skærer cirklen i to punkter, og disse har koordinatsættene: (1,4) og (9,10).

Metode 2: Løsning med en solvekommando i værktøjsprogram

Vi løser ligningssystemet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(x-5)^2 + (y-7)^2 = 5^2$$

som jo er tre ligninger med tre ubekendte t , x og y :

$$x = -3 + 8 \cdot t$$

$$y = 1 + 6 \cdot t$$

$$(x-5)^2 + (y-7)^2 = 5^2$$

Vi løser ligningssystemet med en solvekommando:

$$\text{solve}((x-5)^2 + (y-7)^2 = 5^2 \text{ and } x = -3 + 8 \cdot t \text{ and } y = 1 + 6 \cdot t, t, x, y) \triangleright t = \frac{1}{2} \text{ and } x = 1 \text{ and } y = 4 \text{ or } t = \frac{3}{2} \text{ and } x = 9 \text{ and } y = 10$$

Konklusion: Linjen skærer cirklen i de to punkter, og disse har koordinatsættene: (1,4) og (9,10).

Metode 3: Konstruktion og aflæsning i værktøjsprogram

Vi konstruerer cirklen ud fra centrum $C(5,7)$ og radius $r = 5$. Linjen konstruerer vi ud fra det faste punkt

$$P_0(-3,1) \text{ og retningsvektoren } r_l = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Vi benytter derefter programmets indbyggede kommando til at bestemme skæringspunkterne.

Konklusion: Linjen skærer cirklen i to punkter, og disse har koordinatsættene: (1,4) og (9,10).

