ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Løsning af vektorligninger med determinantmetoden (især A-niveau)

Når vi løser flere lineære ligninger med flere ubekendte fx 2 ligninger med 2 ubekendte svarer det til at løse *en vektorligning*. Ser vi fx på

$$4\cdot x-3\cdot y=6$$
$$2\cdot x+3\cdot y=12$$

så kan vi definere vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix}$ og dermed skrive ligningen således:

$$\vec{a}\cdot x+\vec{b}\cdot y=\vec{c}$$

Løsningen til ligningssystemet kan findes ved vektorregning. Først "prikkes" ligningen med $\vec{b}$, så *y*-leddet forsvinder, og vi dermed kan isolere *x*. Dernæst "prikkes" ligningen med $\vec{a}$, så *x*-leddet forsvinder:

Vi "prikker" ligningen med $\vec{b}$, så *y*-leddet forsvinder, og vi kan isolere *x*:

Skriv ligningen her.

$$\vec{b}\bullet(\vec{a}\cdot x+\vec{b}\cdot y)=\vec{b}\bullet\vec{c}$$
$$\vec{b}\bullet\vec{a}\cdot x+\vec{b}\bullet\vec{b}\cdot y=\vec{b}\bullet\vec{c}$$

$$\vec{b}\bullet\vec{a}\cdot x=\vec{b}\bullet\vec{c}$$

$$x=\frac{\vec{b}\bullet\vec{c}}{\vec{b}\bullet\vec{a}}=\frac{\det(\vec{b},\vec{c})}{\det(\vec{b},\vec{a})}=\frac{-\det(\vec{c},\vec{b})}{-\det(\vec{a},\vec{b})}=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{D_x}{D}$$

Vi "prikker" ligningen med $\vec{a}$, så *x*-leddet forsvinder, og vi kan isolere *y*:

$$\vec{a}\bullet(\vec{a}\cdot x+\vec{b}\cdot y)=\vec{a}\bullet\vec{c}$$
$$\vec{a}\bullet\vec{a}\cdot x+\vec{a}\bullet\vec{b}\cdot y=\vec{a}\bullet\vec{c}$$

$$\vec{a}\bullet\vec{b}\cdot y=\vec{a}\bullet\vec{c}$$

$$y=\frac{\vec{a}\bullet\vec{c}}{\vec{a}\bullet\vec{b}}=\frac{\det(\vec{a},\vec{c})}{\det(\vec{a},\vec{b})}=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{D_y}{D}$$

Her har vi udnyttet, at: $\det(\vec{b},\vec{c})=-\det(\vec{c},\vec{b})$ og $\det(\vec{b},\vec{a})=-\det(\vec{a},\vec{b})$.

Bemærk også, at vi har antaget $D\neq 0$. Dette kommenteres i en øvelse nedenfor.

Vi benævner determinanten i tælleren svarende til den af de ubekendte vi ønsker at bestemme, her henholdsvis D_x og D_y. Bemærk, at D_x fremkommer ved at skrive $\vec{c}$'s koordinater på *x*-koefficienternes plads, mens D_y fremkommer ved at skrive $\vec{c}$'s koordinater på *y*-koefficienternes plads.

Determinanten i begge nævnere er den samme, nemlig $D=\det(\vec{a},\vec{b})$. Man kalder denne for *ligningssystemets determinant*.

Vi samler resultatet i følgende sætning:

Sætning: Løsning af vektorligninger med determinantmetoden

Vektorligningen $\vec{a}\cdot x+\vec{b}\cdot y=\vec{c}$, hvor $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ er egentlige vektorer i planen, har præcis én løsning, når *ligningssystemets determinant* $D\neq 0$. Løsningen er i så fald:

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right),\ \text{hvor } D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix},\ D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix} \text{ og } D_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}.$$

Hvis $D=0$ har ligningssystemet enten ingen eller uendeligt mange løsninger.

ISBN 9788770668699

Øvelse 1 Situationen med $D=0$

a) Vis, at hvis et ligningssystems determinant $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, så er også $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$

b) Udnyt a) til at vise, at hvis $D=0$, så er de linjer, som ligningerne fremstiller, parallelle.
c) Argumenter for sætningens sidste påstand, og giv en geometrisk tolkning af de to muligheder.

Eksempel: Anvendelse af determinantmetoden
Vi løser ligningssystemet ovenfor ved hjælp af determinanter:

$$4\cdot x-3\cdot y=6$$

$$2\cdot x+3\cdot y=12$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot y=\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

hvor vi har:

$$D_x=\det(\vec{c},\vec{b})=\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}=18-(-36)=54 \quad \text{og} \quad D_y=\det(\vec{a},\vec{c})=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}=48-12=36$$

$$D=\det(\vec{a},\vec{b})=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=12-(-6)=18$$

Altså får vi:

$$(x,y)=\left(\frac{54}{18},\frac{36}{18}\right)=(3,2)$$

Systemer af ligninger med flere ubekendte kan således opfattes som vektorligninger

Øvelse 2
Løs ligningssystemet ved determinantmetoden:

$$2\cdot x+5\cdot y+2=0$$

$$3\cdot x-4\cdot y-20=0$$