ISBN 9788770668699

Skæringspunkt mellem linjer – begge givet ved parameterfremstillinger

En linje *m* i planen er parallel med $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, og går gennem punktet $P_0(4,5)$.

En anden linje *l* i planen er givet ved parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

Vi vil bestemme koordinatsættet til skæringspunktet mellem de to linjer.
Vi opskriver først en parameterfremstilling for *m*, hvor vi husker, at vi skal bruge en anden parameter i stedet for *t*, som jo er brugt i parameterfremstillingen for *l*:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+s \\ 5-2\cdot s \end{pmatrix}$$

De to retningsvektorer er ikke parallelle, fordi der gælder, at

$$\det(\vec{r}_m, \vec{r}_l) = \hat{\vec{r}}_m \cdot \vec{r}_l = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -3 + (-4) = -7 \neq 0$$

Altså kan vi være sikker på at linjerne skærer hinanden.

Metode 1: Løsning af to ligninger med to ubekendte i et værktøjsprogram
Vi bestemmer parameterværdierne i skæringspunktet mellem de to linjer ved at løse to ligninger med to ubekendte, idet vi sætter *x*-koordinaterne henholdsvis *y*-koordinaterne lig med hinanden, dvs.

$$\begin{pmatrix} 4+s \\ 5-2\cdot s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2\cdot t \\ -2+3\cdot t \end{pmatrix}$$

$$4+s = 4+2\cdot t$$

$$5-2\cdot s = -2+3\cdot t$$

Vi har således et ligningssystem med to ligninger og to ubekendte *s* og *t*. Disse kan løses i hånden fx ved lige store koefficienters metode, men vi kan også løse det med et værktøjsprogram (typiske med solve), og i begge tilfælde får vi $s=2$ og $t=1$. Kontroller selv i dit værktøjsprogram.
Koordinatsættet til skæringspunktet bestemmes nu ved at indsætte fx $t=1$ i *l*:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kontrollere selv resultatet ved at indsætte $s=2$ i *m.*

2. Metode: Konstruktion og aflæsning i et værktøjsprogram
Vi vil konstruere de to linjer ud fra to punkter på hver af linjerne. Vi har allerede ét punkt på hver af linjerne, nemlig de faste punkter i parameterfremstillingerne. Vi udregner koordinatsættene for et punkt mere på hver af linjerne ved at indsætte to vilkårlige parameterværdier. For linjen *l* vælger vi $t=1$ og får:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},\ \text{dvs. } P_1(5,3)$$

For linjen *m* vælger vi $s=2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix},\ \text{dvs. } Q_1(8,4)$$

ISBN 9788770668699

Vi plotter de fire punkter ind og konstruerer linjerne, hvorefter vi bestemmer skæringspunktet mellem de to linjer med en indbygget kommando i værktøjsprogrammet.