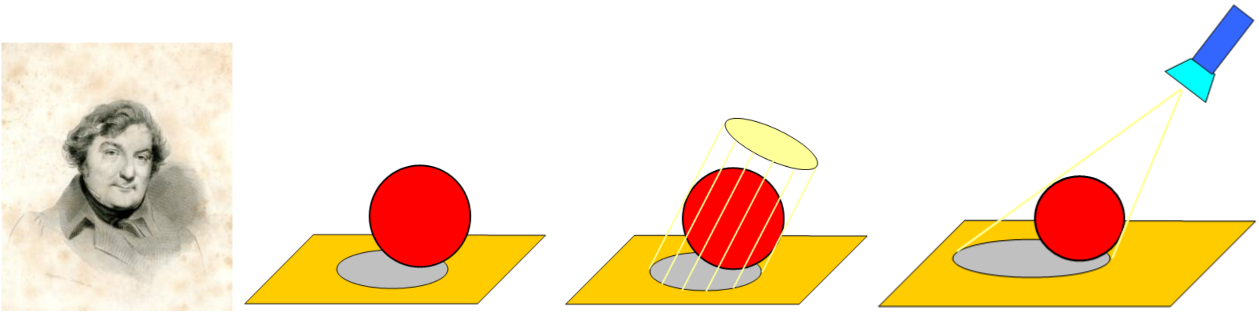
ISBN 9788770668699

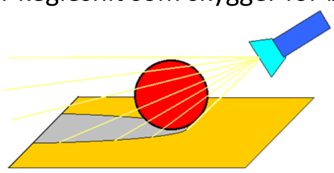
Ellipsen og dens brændpunkter: Dandelins store opdagelse

Apollonius værk om keglesnit er vanskelig at læse, bl.a. fordi grækerne ikke havde et symbolsprog og koordinatsystemer, som vi kender. Men i matematikkens udvikling sker der også af og til det, at en genial matematiker pludselig indser, at gamle og kendte begreber kan anskues på nye måder, der gør tingene mere simple. Ellipser er en slags fladtrykte cirkler, hvor fladtrykningen billedligt talt har splittet centrum i to såkaldte *brændpunkter*. I 1828 opdager den belgiske matematiker Geminal Dandelin (1794 - 1847), at hvis en rund bold hviler på et plant underlag, fx et gulv, så vil skyggen være en ellipse, og bolden hviler lige præcis i et af brændpunkterne. Hvis det er Solens lys, der frembringer skyggen kan denne ellipse opfattes som skæringen mellem det plane gulv og den cylinder, der udgøres af de solstråler, der netop strejfer den runde bold. Det kan nu vendes om, så vi kan anvende dette til en *definition af ellipsens brændpunkter.*

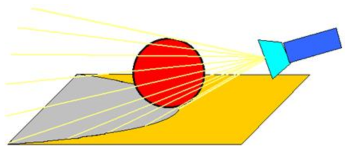


Dandelins mageløse opdagelse: Når ellipsen frembringes som en skyggefigur hviler bolden på brændpunktet

Solen er så langt borte, at strålerne er parallelle. Hvis vi lyste på bolden med en lygte, ville lyskeglen kunne frembringe alle tre typer keglesnit som skygger for bolden!



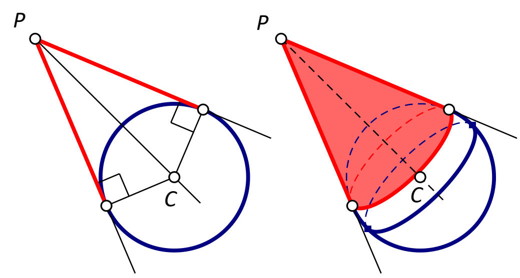
Parablen som skyggefigur



Hyperblen som skyggefigur

Vi vil her koncentrere os om ellipsen og vil nu bevise den centrale sætning om ellipsens brændpunkter. I beviset får vi brug for følgende:
Hvis man trækker en tangent fra et ydre punkt til en cirkel er der to muligheder og de to tangentstykker er lige lange. Hvis man trækker en tangent fra et ydre punkt til en kugle er der uendeligt mange muligheder, men igen er tangentstykkerne lige lange.

Øvelse
Prøv selv at argumentere for dette ud fra tegningen og ved brug af en kongruenssætning.



ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Vi definerer en ellipse som et plant snit i en cylinder.
To kugler med samme diameter som cylinderen lægges henholdsvis over og under ellipseplanen.
Røringspunkterne kaldes for brændpunkter og betegnes F_1 *og* F_2. Se figur a.

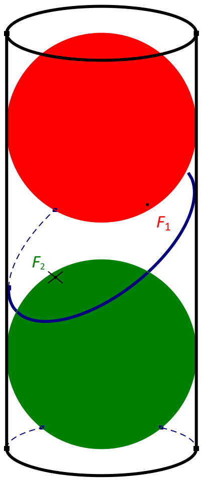
Målet er at bevise, at *summen af brændpunktafstandene* $PF_1 + PF_2$ er konstant for en ellipse (se figur b):
Lad P være et punkt på ellipsen. Tegn de to tangentstykker til den øvre kugle, se figur c:

(1) Dels den lodrette tangent langs cylinderfladen, der går fra P til skæringspunktet med ækvator Q_1.
(2) Dels tangenten langs ellipseplanen. Da kuglen tangerer ellipseplanen i brændpunktet F_1, vil dette tangentstykke derfor gå fra P til F_1.

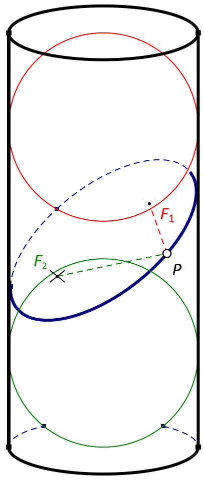
Vi har nu to tangentstykker til den øvre kugle. De må derfor være lige lange: $PQ_1 = PF_1$. Se figur c.
På samme måde kan vi finde to tangentstykker til den nedre kugle:

(1) Dels kan vi trække den lodrette tangent langs cylinderfladen. Dette tangentstykke vil derfor gå fra P til skæringspunktet med ækvator Q_2.
(2) Dels kan vi trække tangenten langs ellipseplanen. Da kuglen tangerer ellipseplanen i brændpunktet F_2, vil dette tangentstykke derfor gå fra P til F_2. Se figur d.

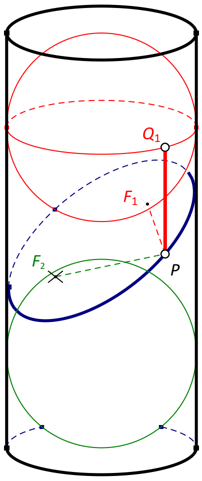
Vi har nu to tangentstykker til den nedre kugle. De må derfor også være lige lange $PQ_2 = PF_2$.
Men så må summen af brændpunkt-afstandene være givet ved $PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2 = Q_1Q_2$, og da afstanden mellem ækvatorcirklerne er konstant er *summen af brændpunktsafstandene konstant*. ✓



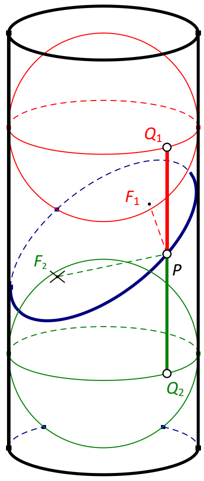
Figur a



Figur b



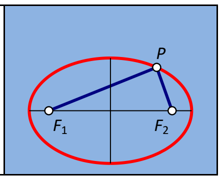
Figur c



Figur d

Du kan [her] finde en animation af beviset.

Sætning 1a: Ellipsen og dens brændpunkter
I en ellipse med brændpunkterne F_1 og F_2 er summen af brændpunktafstandene konstant: $F_1P + F_2P = \text{konstant}$
hvor P er et vilkårligt punkt på randen af ellipsen.



Bemærkning. Sætningen er et godt eksempel på *hvad matematik er*: Selv om vi i beviset udelukkende argumenterer ud fra velkendte egenskaber, så afdækkes pludselig en viden, vi ikke havde før.