ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 7.7. Løsning af vektorligninger med determinantmetoden

(*Dette projekt bygger på kendskab til vektorregning*)
Vi kender forskellige metoder til løsning af ligninger med 1 eller 2 ubekendte. Hvad nu hvis der er 3 eller 100 ligninger med 100 ubekendte? Selv om *substitutionsmetoden* og *lige store koefficienters metode* begge kan generaliseres, så kan man godt se, at det hurtigt kan blive meget indviklet at holde styr. Derfor er der udviklet nye metoder og algoritmer til ligningsløsning. Vi introducerer metoden ud fra det vi kender: 2 ligninger med 2 ubekendte – og vil se, at dette kan generaliseres.

1. Løsning af to ligninger med to ubekendte med determinantmetoden

Når vi løser flere lineære ligninger med flere ubekendte fx 2 ligninger med 2 ubekendte svarer det til at løse *en vektorligning*. Ser vi fx på

$$4\cdot x-3\cdot y=6$$
$$2\cdot x+3\cdot y=12$$

så kan vi definere vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix}$ og dermed skrive ligningen således:

$$\vec{a}\cdot x+\vec{b}\cdot y=\vec{c}$$

Løsningen til ligningssystemet kan findes ved vektorregning. Først "prikkes" ligningen med $\vec{b}$, så *y*-leddet forsvinder, og vi dermed kan isolere *x*. Dernæst "prikkes" ligningen med $\vec{a}$, så *x*-leddet forsvinder:

Vi "prikker" ligningen med $\vec{b}$, så *y*-leddet forsvinder, og vi kan isolere *x*:

$$\vec{b}\square(\vec{a}\cdot x+\vec{b}\cdot y)=\vec{b}\square\vec{c}$$
$$\vec{b}\square\vec{a}\cdot x+\vec{b}\square\vec{b}\cdot y=\vec{b}\square\vec{c}$$
$$\vec{b}\square\vec{a}\cdot x=\vec{b}\square\vec{c}$$

Vi "prikker" ligningen med $\vec{a}$, så *x*-leddet forsvinder, og vi kan isolere *y*:

$$\vec{a}\square(\vec{a}\cdot x+\vec{b}\cdot y)=\vec{a}\square\vec{c}$$
$$\vec{a}\square\vec{a}\cdot x+\vec{a}\square\vec{b}\cdot y=\vec{a}\square\vec{c}$$
$$\vec{a}\square\vec{b}\cdot y=\vec{a}\square\vec{c}$$

Vi bemærker her, at udtryk som $\vec{a}\square\vec{b}$ er en determinant: $\vec{a}\square\vec{b}=\det(\vec{a},\vec{b})=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1$:

Vi isolerer *x* og *y* og indfører determinantsymbolet i opskrivning af løsningerne:

$$x=\frac{\vec{b}\square\vec{c}}{\vec{b}\square\vec{a}}=\frac{\det(\vec{b},\vec{c})}{\det(\vec{b},\vec{a})}=\frac{-\det(\vec{c},\vec{b})}{-\det(\vec{a},\vec{b})}=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{D_x}{D}\qquad y=\frac{\vec{a}\square\vec{c}}{\vec{a}\square\vec{b}}=\frac{\det(\vec{a},\vec{c})}{\det(\vec{a},\vec{b})}=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{D_y}{D}$$

Her har vi udnyttet, at: $\det(\vec{b},\vec{c})=-\det(\vec{c},\vec{b})$ og $\det(\vec{b},\vec{a})=-\det(\vec{a},\vec{b})$.

Bemærk også, at vi har antaget $D\neq 0$. Dette kommenteres i en øvelse nedenfor.

Vi benævner determinanten i tælleren svarende til den af de ubekendte vi ønsker at bestemme, her henholdsvis D_x og D_y. Bemærk, at D_x fremkommer ved at skrive $\vec{c}$'s koordinater på *x*-koefficienternes plads, mens D_y fremkommer ved at skrive $\vec{c}$'s koordinater på *y*-koefficienternes plads. Determinanten i begge nævnere er den samme, nemlig $D=\det(\vec{a},\vec{b})$. Man kalder denne for *ligningssystemets determinant*.

L&R Uddannelse EGMONT

Vi samler resultatet i følgende sætning:

Sætning 1: Løsning af to ligninger med to ubekendte med determinantmetoden

Vektorligningen $\vec{a}\cdot x+\vec{b}\cdot y=\vec{c}$, hvor $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ er egentlige vektorer i planen, har præcis én løsning, når *ligningssystemets determinant* $D\neq 0$. Løsningen er i så fald:

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)\text{ , hvor } D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\ D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ og } D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Hvis $D=0$ har ligningssystemet enten ingen eller uendeligt mange løsninger.

Øvelse 1: Situationen med $D=0$

a) Vis, at hvis et ligningssystems determinant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, så er også $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$

b) Udnyt a) til at vise, at hvis $D=0$, så er de *linjer*, som ligningerne fremstiller, parallelle.

c) Argumenter for sætningens sidste påstand, og giv en geometrisk tolkning af de to muligheder.

Eksempel: Anvendelse af determinantmetoden

Vi løser ligningssystemet ovenfor ved hjælp af determinanter:

$4\cdot x-3\cdot y=6$

$2\cdot x+3\cdot y=12$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot y=\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

hvor vi har:

$$D_x=\det(\vec{c},\vec{b})=\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}=18-(-36)=54 \quad \text{og} \quad D_y=\det(\vec{a},\vec{c})=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}=48-12=36$$

$$D=\det(\vec{a},\vec{b})=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=12-(-6)=18$$

Altså får vi:

$$(x,y)=\left(\frac{54}{18},\frac{36}{18}\right)=(3,2)$$

Øvelse 2

Løs ligningssystemet ved determinantmetoden:

$2\cdot x+5\cdot y+2=0$

$3\cdot x-4\cdot y-20=0$

Øvelse 3

Benyt determinantmetoden til at løse nogle af ligningssystemerne fra øvelse 3.10.

2. Løsning af 3 ligninger med 3 ubekendte med determinantmetoden

Hvis vi prøver at løse 3 ligninger med 3 ubekendte vha. substitutions- eller koefficientmetoden, kan det hurtigt blive en noget langtrukken proces. Men determinantmetoden som formuleret i sætning 6 åbner imidlertid mulighed for en smart måde at gøre tingene på. Lad os se på et eksempel

ISBN 9788770668699

$$6x-4y+2z=5$$
$$7x+y-2z=1$$
$$4x+3y+6z=-2$$

Hvis vi helt mekanisk følger ideen i forrige afsnit, så omformes dette til en vektorligning:

$$\vec{a}\cdot x+\vec{b}\cdot y+\vec{c}\cdot z=\vec{d}\text{, hvor } \vec{a}=\begin{pmatrix}6\\7\\4\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix}\text{ og } \vec{d}=\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Herfra er det ikke så let at se, hvordan vi kopierer situationen i 2d, for tværvektorbegrebet findes ikke i 3d. Derfor er man nødt til at gå et skridt videre og omforme vektorligningen til det man kalder en matrix-ligning:

$$\begin{pmatrix}6&-4&2\\7&1&-2\\4&3&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}\text{, hvor talblokken kaldes en matrix}$$

Øvelse 4 Hvordan en vektor ganges på en matrix

a) Matricen består åbenbart af alle koefficienterne, skrevet på deres pladser, men uden de ubekendte. Disse er til gengæld samlet i en vektor, der tilsyneladende skal ganges på. Kan du forklare hvordan vektoren ganges på matricen, så vi får de oprindelige tre ligninger med tre ubekendte?

b) Prøv at opskrive følgende ligningssystem som en matrixligning:

$$4\cdot x-3\cdot y=6$$
$$2\cdot x+3\cdot y=12$$

I afsnit 4.1 fandt vi ud af, at løsningen til ligningssystemet i ovenstående øvelse kunne skrives med determinantsymbolet således:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}6&-3\\12&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&-3\\2&3\end{vmatrix}}=\frac{54}{18}=3 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}4&6\\2&12\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&-3\\2&3\end{vmatrix}}=\frac{36}{18}=2$$

Når man ser en formel som i denne fra sætning 6, så får man let den tanke: Kunne det ikke bare generaliseres så vi kan opstille en formel for 3 ligninger med 3 ubekendte?
Og videre endnu med 4 ligninger med 4 ubekendte, 5 ligninger... , n ligninger med n ubekendte?

Og svaret er bekræftende: Det kan man. For tre ligninger med tre ubekendte, som den vi startede med, er løsningen:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}},\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}}$$

Problemet er selvfølgelig, at vi ikke har forklaret, hvordan man udregner 3 x 3 determinanter. Det illustrerer vi med udregning af *ligningssystemnets determinant*:

ISBN 9788770668699

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3$$

Øvelse 5. Udregning af en 3 x 3 determinant
a) Anvend formlen til at udregne determinanten for ligningssystemet:

$$\begin{aligned} 6x - 4y + 2z &= 5 \\ 7x + y - 2z &= 1 \\ 4x + 3y + 6z &= -2 \end{aligned}$$

Du skal få 306.

b) Formlen for 3 x 3 determinanter kan lettest huskes og anvendes ved at opskrive to talblokke efter hinanden, og derefter først udregne produktet af de tre første diagonaler skråt ned til højre, som adderes, og så udregne produktet af de sidste tre diagonaler skråt ned til venstre, som subtraheres.

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$

Tjek denne ”tommelfingerregel” med formlen ovenfor.

c) Udregn de øvrige tre determinanter, og bestem løsningerne *x*, *y* og *z*.
Du skal få: $x = \frac{78}{306}$, $y = \frac{-274}{306}$, $z = \frac{-17}{306}$
(Løsningerne kan reduceres, men det er ikke så interessant her)

Vi har jo ikke *bevist* formlen for løsning af tre ligninger med tre ubekendte vha determinantformlen, blot *forklaret* formlen. Beviset kan ikke gennemføres ved at kopiere beviset for 2 ligninger med 2 ubekendte, da der ikke findes tværvektorer i 3d. Ideen i beviset fra 2d bygger på ideen fra lige store koefficienters metode, og man kan godt komme igennem med dette. Men undervejs i arbejdet med sådanne ligningssystemer opdagede Gauss en anden og beslægtet metode – som idag kaldes *Gauss-elimination* – og som umiddelbart kan generaliseres til alle ligningssystemer. Det er et andet spor, som vi ikke vil forfølge her, men det er metoder, som man godt kan forstå og tilegne sig på gymnasieniveau.

4 Matrixalgebra og løsning af n ligninger med n ubekendte

Generelt kan ethvert ligningssystem af n ligninger med n ubekendte løses ved determinantmetoden, såfremt ligningssystemets determinant er forskellig fra 0. Hvis *den er 0* svarer det til, at ligningssystemet har ingen løsninger, eller uendeligt mange løsninger. Det er teoretisk elegant at vi som i afsnit 4.2 kan opskrive løsningerne til et ligningssystem i én formel. Formlerne kaldes Cramers formler, opkaldt efter den schweiziske matematiker Gabriel Cramer (1704-1752).
I praxis er formlerne mere problematiske at bruge. I afsnit 4.1 så vi at en 2 x 2 determinant har 2 led. Men i afsnit 4.2 så vi, at en 3 x 3 determinant har 6 led.
Antallet af led kan også angives som $3 \cdot 2 = 3!$. Og for en 4 x 4 determinant bliver antallet af led $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Øvelse 6: Hvor mange led er der i en determinant?
a) Hvor mange led er der i en 5 x 5 determinant?
b) Du har et ligningssystem med 10 ligninger med 10 ubekendte og vil løse det med determinantmetoden. Hvor mange led er der i udregningen af determinanterne?

Øvelse 4.6 fortæller at vi må have andre metoder end determinantmetoden, når vi skal løse mange ligninger. Det er der udviklet metoder til. De bygger videre på omskrivningen af ligningssystemer på matrixform. Hvis vi i ligningen fra afsnit 4.2:

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

kalder matricen for ***A***, vektoren med de variable for ***v***, og vektoren med værdierne for ***b,*** så kan ligningen skrives:

$A \cdot v = b$, hvor vi skal bestemme ***v***

Det er starten på det matematiske område der hedder *matrixalgebra.* Projekt 7.9 giver en indføring i dette ud fra 2 x 2 matricer.

5 Overbestemte og underbestemte systemer

Af *TICRA*-filmen fremgår det, at virkeligheden i parabolkonstruktionens verden desværre sjældent er så simpel, at problemløsningen munder ud i *n* ligninger med *n* ubekendte. Ofte er ligningssystemet enten underbestemt (for få ligninger/informationer til antallet af ubekendte) eller overbestemt (for mange ligninger/informationer til antallet af ubekendte).

Øvelse 7

Afgør hvilke af følgende to ligningssystemer, der er overbestemte og underbestemte. Overvej i hvert tilfælde om der er én løsning, uendeligt mange løsninger eller måske slet ingen løsninger.

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - 3y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -2x - y + z &= 1 \\ 3x - 2y + 2z &= 2 \\ x + y + z &= 4 \\ 2x - y - z &= 4 \end{aligned}$$

Skal vi bestemme værdierne af tre variable, er det ikke en fordel at have 4 oplysninger. Det er generelt ikke en fordel at have for mange oplysninger. Men sådan er virkeligheden, og har vi ”for mange” oplysninger, er vi selvfølgelig nødt til at tage hensyn til dem. Det fører over i et nyt matematisk emne: *Numeriske løsninger*, som handler om at bestemme tilnærmede løsninger.