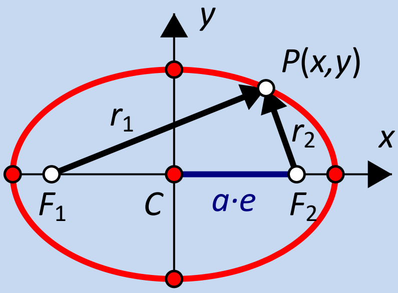
ISBN 9788770668699

Projekt 7.6 Ellipsens brændstråler og Keplers anden lov

Vi vil her finde en formel for brændstrålernes længde og med afsæt heri undersøge Keplers anden lov.

Ellipsens brændstråler

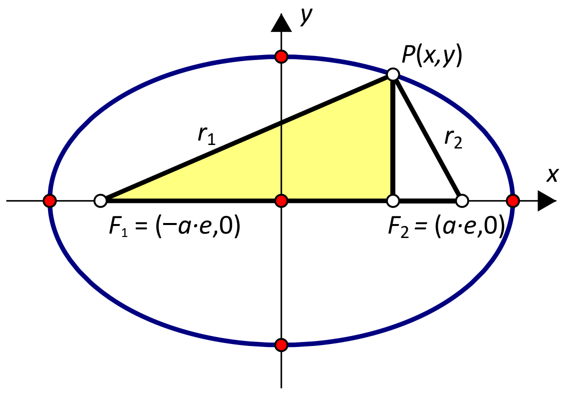
Sætning: Ellipsens brændstråler



Hvis en ellipse er indlejret i et koordinatsystem med ellipsens akser som koordinatakser, så er længden af brændstrålerne givet ved

$$r_1 = a + e \cdot x \text{ og } r_2 = a - e \cdot x \,.$$

Bevis:
Betragt figuren:



Af Pythagoras´ sætning fås:

$$r_1^2 = (x + a \cdot e)^2 + y^2$$

Indsættes udtrykket for y^2 fra ellipsens ligning fås:

$$r_1^2 = x^2 + 2a \cdot e \cdot x + a^2 \cdot e^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$$

Indsættes udtrykket for b^2 fås:

$$r_1^2 = x^2 + 2a \cdot e \cdot x + a^2 \cdot e^2 + a^2 - a^2 \cdot e - \frac{a^2 - a^2 \cdot e^2}{a^2} \cdot x^2$$

$r_1^2 = \cancel{x^2} + 2a \cdot e \cdot x + \cancel{a^2 \cdot e^2} + a^2 - \cancel{a^2 \cdot e} - \cancel{x^2} + e^2 \cdot x^2$ Reducer den sidste brøk

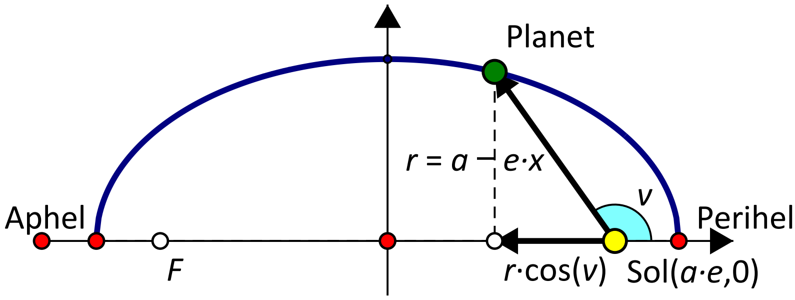
$r_1^2 = a^2 + 2a \cdot e \cdot x + e^2 \cdot x^2$ Fjern de led der går ud mod hinanden

$r_1^2 = (a + e \cdot x)^2$ Brug kvadratsætningen

Heraf følger netop at $r_1 = a + e \cdot x$. På samme måde findes udtrykket for r_2 – prøv selv! ✓

Af sætningen følger blandt andet at toppunkterne på storeaksen netop er de to punkter på ellipsebanen, der ligger *tættest* på Solen henholdsvis *fjernest* fra Solen. De kaldes derfor også for *Perihelet* og *Aphelet*.

ISBN 9788770668699



Ifølge sætningen er afstanden r fra Solen til planeten altså givet ved:

$$r = a - e \cdot x\,,$$

hvor $x = a \cdot e + r \cdot \cos(v)$. Her står v for retningsvinklen for planeten målt i forhold til Perihelet. Kombineres disse to ligninger finder vi nu

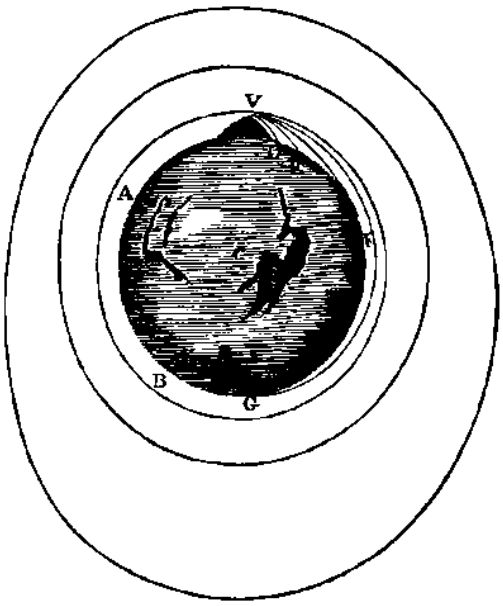
$r = a - e \cdot x$	
$r = a - e \cdot (a \cdot e + r \cdot \cos(v))$	Indsæt udtrykket for x
$r = a - a \cdot e^2 - e \cdot r \cdot \cos(v)$	Gang parentessen ud
$r + e \cdot r \cdot \cos(v) = a - a \cdot e^2$	Læg $e \cdot r \cdot \cos(v)$ til på begge sider
$r \cdot (1 + e \cdot \cos(v)) = a \cdot (1 - e^2)$	Sæt r og a uden for en parentes
$r = \dfrac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(v)}$	Divider med $1 + e \cdot \cos(v)$ på begge sider
$r = \dfrac{p}{1 + e \cdot \cos(v)}$	Sæt $a \cdot (1 - e^2) = p$

hvor p kaldes ellipsens *halve bredde* (*semilatus rectum*).

Det er bemærkelsesværdigt at denne ligning gælder for *alle* himmellegemers baner i Solesystemet, også for fremmede legemer, der måtte følge de andre keglesnit.

Dette er i overensstemmelse med Newtons teori for gravitationen ifølge hvilken en satellit, der udskydes vandret fra en kanon oppe på et stort bjerg vil følge en bane med Jordens centrum som det ene brændpunkt: Ved små hastigheder styrter satellitten ned.

Ved større hastigheder følger den en ellipseformet bane rundt om Jorden. Ved endnu større hastigheder en parabelformet bane væk fra Jorden og til slut en hyperbelformet bane væk fra Jorden.



ISBN 9788770668699

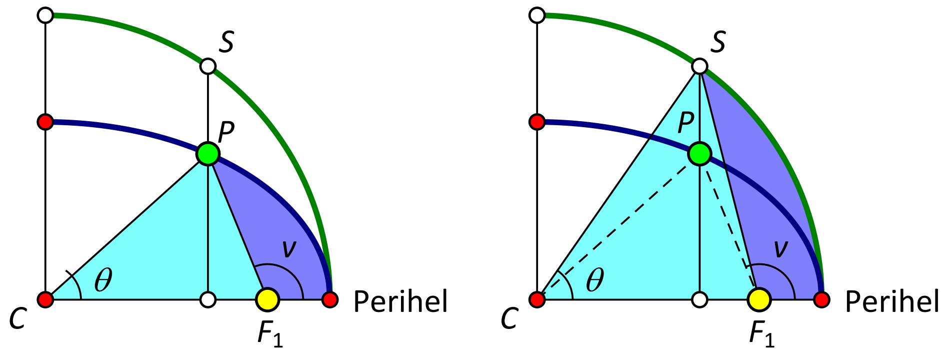
Øvelse 1:

a) Opret i dit dynamiske geometriprogram en cirkel med centrum i Solen *S*. Afsæt et frit punkt *Q* på cirklen og mål retningsvinklen *v*. Afsæt en halvlinje fra *S* gennem *Q*.

b) Beregn afstanden til himmellegemet *r* givet ved den ovenstående formel, idet du indfører en variabel excentricitet *e*. Afsæt planeten *P* i denne afstand langs halvlinjen. Konstruér planetens bane som et geometrisk sted drevet af *Q*. Bemærkning: Du kan også tegne banen som et *polært plot*.

c) Variér excentriciteten *e* og frembring derved alle typer keglesnit som baner.

Keplers anden lov



Vi kan nu undersøge Keplers *anden lov* nærmere, ifølge hvilken forbindelseslinjen til en planet overstryger et areal, der vokser jævnt med tiden.
Hvis der er gået tiden *t* siden perihelpassagen, og planeten har omløbstiden *T*, har vi derfor overstrøget arealet:

$$A = \pi \cdot a \cdot b \cdot \frac{t}{T}$$

Vi minder lige om arealsætninger:

Trekant: $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$ og Cirkeludsnit: $T = \frac{v}{360} \cdot \pi \cdot r^2$

Da ellipsen kan opfattes som en fladtrykt cirkel med fladtrykningsfaktoren $\frac{b}{a}$ kan vi finde de relevante arealer, og indsætte i det samlede udtryk:

$$\square CF_1P + A_{\text{overstrøget af } F_1P} = A_{\text{overstrøget af } CP}$$

$$\frac{b}{a} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot (a \cdot e) \cdot \sin(\theta)\right) + \pi \cdot a \cdot b \cdot \frac{t}{T} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\theta}{360} \cdot \pi \cdot a^2 \qquad \text{Anvend arealsætningerne}$$

$$\frac{1}{2} \cdot e \cdot \sin(\theta) + \pi \cdot \frac{t}{T} = \frac{\theta}{360} \cdot \pi \qquad \text{Reducer}$$

$$\theta = 360 \cdot \frac{t}{T} + \frac{180}{\pi} \cdot e \cdot \sin(\theta) \qquad \text{Isolér } \theta$$

Ligningen kaldes *Keplers ligning*. Kender vi tiden *t* siden sidste perihelpassage, kan vi løse ligningen og finde centervinklen θ (og derefter bruge trigonometri til at finde retningsvinklen *v* og planetafstanden *r*). Det er et af de tidligste eksempler på en ligning, der *ikke* kan løses med en formel, en såkaldt *transcendent* ligning, fordi den både indeholder den ubekendte θ på sædvanlig vis og begravet inde i en såkaldt transcendent funktion, her sinus. Meget moderne matematik er udviklet med henblik på at kunne håndtere løsningen af bl.a. Keplers ligning på anden vis. En af idéerne går ud på at løse ligningen *iterativt*.

ISBN 9788770668699

Højresiden består af to led:
Det første svarer netop til centervinklen for en jævn cirkelbevægelse med omløbstid *T*.
Det andet led er normalt meget mindre end den jævne vinkel, fordi excentriciteten er meget lille.
Til første tilnærmelse kan vi derfor give θ startværdien $\theta_0 = 360 \cdot \frac{t}{T}$.
Indsættes det i ligningen fås den første iteration osv.:

$$\theta_1 = 360 \cdot \frac{t}{T} + \frac{180}{\pi} \cdot e \cdot \sin(360 \cdot \frac{t}{T}) \quad \rightarrow \quad \theta_2 = 360 \cdot \frac{t}{T} + \frac{180}{\pi} \cdot e \cdot \sin(\theta_1)$$

I løbet af få iterationer stabiliseres vinklen nu med den ønskede nøjagtighed og vi har løst ligningen!

Øvelse 2:

a) Løs ligningen med iteration i dit værktøjsprogram, fx i et regneark.

b) *Udfordring*: Prøv også om du kan lave en korrekt dynamisk model af planetbevægelsen.