ISBN 9788770668699

Projekt 7.5 Ellipser – brændpunkter, brændstråler og praktisk anvendelse i en nyrestensknuser

Ellipsens ligning har vi undersøgt i den indledende fortælling til kapitel 7.
I det følgende skal vi undersøge ellipser som *banekurver*, og vise, hvorledes denne beskrivelse kan åbne for en indsigt i, hvordan en nyrestensknuser fungerer. Selv om vi først gennemfører en systematisk undersøgelse af vektorfunktioner og deres grafer, der kaldes banekurver, så er den symbolik vi anvender let genkendelig fra fx linjens parameterfremstilling. Så projektet er således også en introduktion til begrebet vektorfunktion.

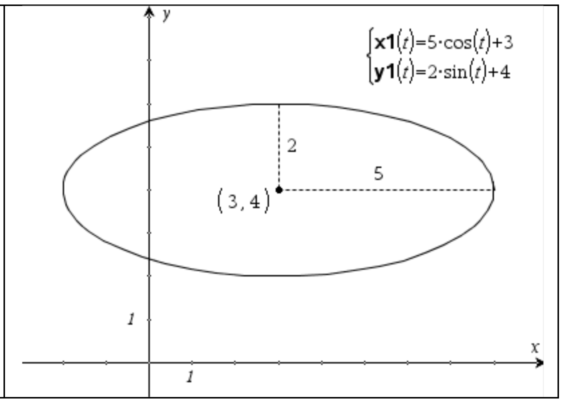
Eksempel 1

Figuren viser *banekurven* for vektorfunktionen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

hvor $0 \le t \le 2\pi$.

Banekurven er en *ellipse* med *centrum* i $(3,4)$, *storakse* $a = 2\cdot 5 = 10$ og *lilleakse* $b = 2\cdot 2 = 4$.



Øvelse 1
Vi vil nu undersøge vektorfunktionen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

hvor $0 \le t \le 2\pi$, ved variabelkontrol, dvs ved på *skift* at lade x_0 , y_0 , a og b variere.

a) Hold x_0 , y_0 og b fast. Lad a variere, plot en vandret linje igennem (x_0, y_0) , aflæs skæringspunkterne med banekurven og aflæs afstanden mellem de to punkter. Hvilken betydning har a for banekurvens udseende?

b) Hold x_0 , y_0 og a fast. Lad b variere, plot en lodret linje igennem (x_0, y_0) , aflæs skæringspunkterne med banekurven og aflæs afstanden mellem de to punkter. Hvilken betydning har b for banekurvens udseende?

c) Hold x_0 , a og b fast. Lad y_0 variere, plot centrum og aflæs. Hvilken betydning har y_0 for banekurvens forløb?

d) Hold y_0 , a og b fast. Lad x_0 variere, plot centrum og aflæs. Hvilken betydning har x_0 for banekurvens forløb?

Øvelse 2

a) Bestem en vektorfunktion for en ellipse med centrum i $(-1,2)$, storakse på 14 og lilleakse 6.

b) Tegn banekurven for ellipsen.

c) Benyt kurvelængdeformlen til at bestemme ellipsens omkreds.

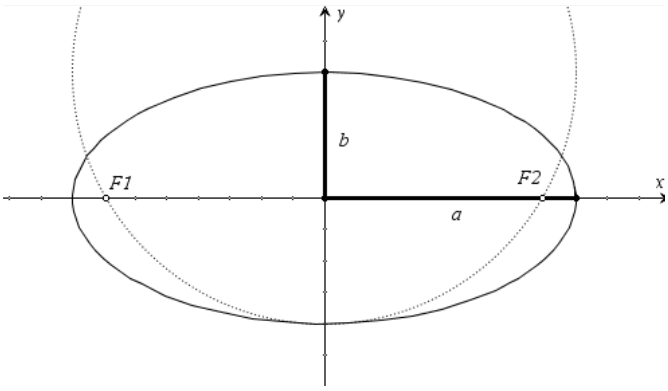
Øvelse 3

Vis at vektorfunktionen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ svarer til ligningen $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

ISBN 9788770668699

2. Brændpunkter

Vi betragter ellipsen med centrum i $(0,0)$ og storakse $2a$ samt lilleakse $2b$ (se figur). Ellipsens brændpunkter, F_1 og F_2, er defineret som skæringspunkterne mellem ellipsens storakse og cirklen med centrum $P(0,b)$ og radius a.



Afstanden fra koordinatsystemets begyndelsespunkt til brændpunkterne er derfor

$$|OF_1| = |OF_2| = \sqrt{a^2 - b^2}\ .$$

Dvs brændpunkterne har koordinaterne $F_1(-\sqrt{a^2-b^2},0)$ og $F_2(\sqrt{a^2-b^2},0)$.

Øvelse 4

Eftervis, at $|OF_1| = |OF_2| = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Betragter vi i stedet en ellipse med centrum i $C(x_0, y_0)$, storakse $2a$ og lilleakse $2b$, så vil brændpunkterne naturligvis have koordinaterne

$$F_1(x_0 - \sqrt{a^2-b^2}, y_0) \quad \text{og} \quad F_2(x_0 + \sqrt{a^2-b^2}, y_0),$$

svarende til at centrum er parallelforskudt med stedvektoren $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Hvis $P(x,y)$ er et tilfældigt punkt på ellipsen kaldes linjestykkerne PF_1 og PF_2 brændstrålerne fra P.

Øvelse 5

a) Bestem F_1 og F_2 for ellipsen i eksempel 1.

b) Tegn ellipsen og afsæt et tilfældigt punkt $P(x,y)$ på banekurven.

c) Bestem længden af brændstrålerne fra P.

d) Undersøg ved at variere $P(x,y)$, hvad der gælder for afstanden $|PF_1| + |PF_2|$.

Øvelse 6

Vi ser igen på en ellipse med centrum i $C(x_0, y_0)$, storakse $2a$ og lilleakse $2b$, som jo har vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

hvor $0 \le t \le 2\pi$.

Vis, at $|PF_1| + |PF_2| = 2a$.

L&R Uddannelse
EGMONT

3. Excentricitet

I forbindelse med ellipser optræder begrebet excentricitet.
En ellipses excentricitet betegnes e, og er defineret ved

$$e = \frac{|F_1F_2|}{2a},$$

hvor F_1 og F_2 er ellipsens brændpunkter, og a er ellipsens halve storakse.

Øvelse 7

Vis, at

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

hvor a, henholdsvis b er ellipsens halve lilleakse henholdsvis halve storakse.

Øvelse 8

Undersøg excentricitetens betydning for ellipsens udseende, idet excentriciteten defineres som en funktion af den halve lilleakse, dvs.

$$e(b) = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

og a varieres i intervallet $b \leq a < \infty$.

ISBN 9788770668699

4. Brændstrålernes vinkel med tangenten og anvendelsen heraf i en nyrestensknuser.

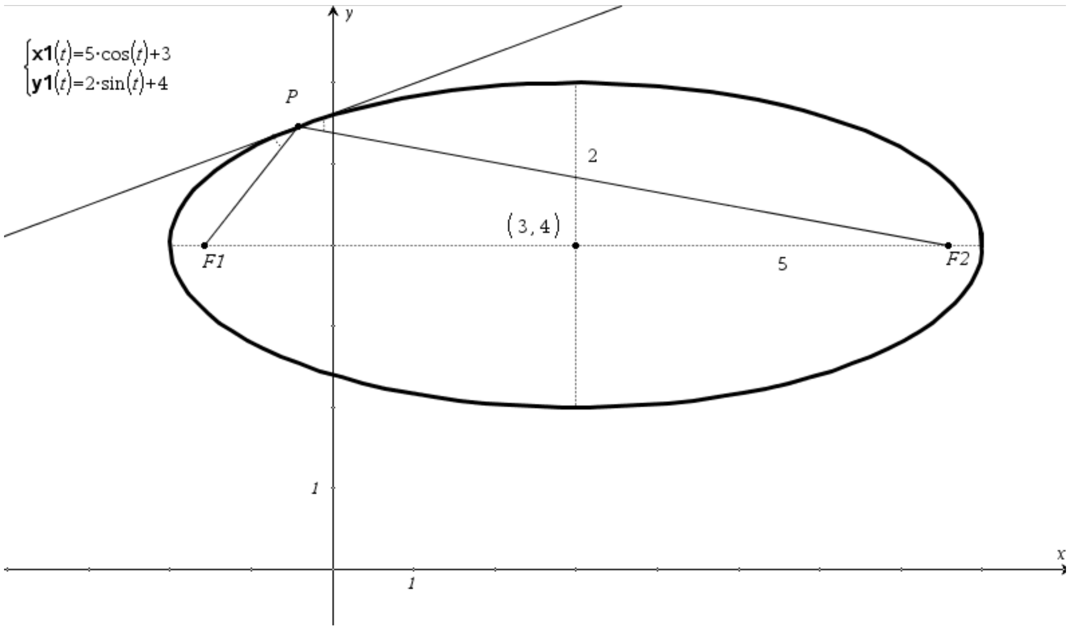
Øvelse 9

Vi ser igen på ellipsen fra eksempel 1.

a) Tegn ellipsen, og afsæt et tilfældigt punkt $P(x,y)$ på banekurven.

b) Tegn brændstrålerne fra P, og tegn tangenten i punktet P.

c) Bestem ved hjælp af dit geometriprogram vinklen mellem hver af brændstrålerne fra P og tangenten i P (se figur).



d) Undersøg, hvad der gælder om de to vinkler, når $P(x,y)$ varieres.

e) Hvad gælder der om en brændstråle, der starter i et af brændpunkterne og reflekteres i tangenten?

Den egenskab vi opdagede eksperimentelt i øvelse 9 vil vi nu bevise. Egenskaben i øvelse 9e) udnyttes i de såkaldte nyrestensknusere, idet en patient placeres så den nyresten, der skal pulveriseres, befinder sig i den ene brændpunkt af en ellipsoide (en omdrejningsellipse), mens der i det andet brændpunkt befinder sig en lydkilde, der kan udsende ultralyd. Når lydbølgerne herfra rammer overfladen reflekteres de og samles i det andet brændpunkt. Derved opstår en høj koncentration af lydenergi, som vil være i stand til at ødelægge nyrestenen uden noget operativt indgreb.

Øvelse 10

Vi betragter ellipsen med centrum i $(0,0)$ og storakse $2a$ samt lilleakse $2b$.
Vis, at ellipsens brændpunkter, F_1 og F_2, har koordinaterne $F_1(-e\cdot a,0)$ og $F_2(e\cdot a,0)$.

(Vink: Udnyt fx formlen $e=\dfrac{|F_1F_2|}{2a}$ som kan omskrives til: $|F_1F_2|=e\cdot 2a$, og udnyt ellipsens symmetriegenskab)

ISBN 9788770668699

Øvelse 11

Betragt et tilfældigt punkt P på ellipsen med stedvektor $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos(t)\\b\sin(t)\end{pmatrix}$. Stedvektoren som funktion af t betegnes $\vec{r}(t)$.

a) $\vec{r}'(t)$ er retningsvektor for tangenten. Vis, at $\vec{r}'(t)=\begin{pmatrix}-a\sin(t)\\b\cos(t)\end{pmatrix}$.

b) Kald vinklen mellem brændstrålen F_1P og *tangenten* for u, og vinklen mellem brændstrålen F_2P og *tangenten* for v. Bemærk, dette er vinkler mellem linjestykker. Argumenter ud fra tegningen ovenfor eller ud fra din egen tegning for, at vinkel u svarer til vinklen mellem vektorerne $\overrightarrow{PF_1}$ og $\vec{r}'(t)$, og at vinkel v svarer til vinklen mellem vektorerne $\overrightarrow{F_2P}$ og $\vec{r}'(t)$.

c) Vis, at disse vektorer har koordinaterne: $\overrightarrow{PF_1}=\begin{pmatrix}-ea-a\cos(t)\\-b\sin(t)\end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{F_2P}=\begin{pmatrix}a\cos(t)-ea\\b\sin(t)\end{pmatrix}$

Vi ønsker at vise, at vinkel u er lig med vinkel v. Dette gør vi ved at vise, at $\cos(u)=\cos(v)$. Og i den sidste ligning kan vi udnytte vores viden om sammenhæng mellem skalarprodukt og vinkel:

$$\cos(u)=\frac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\vec{r}'(t)}{\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\vec{r}'(t)\right|}\qquad\qquad \cos(v)=\frac{\overrightarrow{F_2P}\cdot\vec{r}'(t)}{\left|\overrightarrow{F_2P}\right|\cdot\left|\vec{r}'(t)\right|}$$

Vi udnytter nu formlen $e^2\cdot a^2=a^2-b^2$, som vi får fra øvelse 7, samt formlen $(\cos(t))^2+(\sin(t))^2=1$ til at gennemføre følgende udregninger:
(*de farvede udtryk svarer til hinanden – argumenter for hvert trin i omskrivningen*)

$$\begin{aligned}
\left(\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\right)^2 &= (-ea-a\cos(t))^2+(-b\sin(t))^2\\
&=\left[e^2\cdot a^2+a^2\cdot(\cos(t))^2+2\cdot ea\cdot a\cos(t)\right]+\left[b^2\cdot(\sin(t))^2\right]\\
&=\left(a^2-b^2\right)+a^2\cdot(\cos(t))^2+2\cdot ea\cdot a\cos(t)+b^2\cdot\left(1-(\cos(t))^2\right)\\
&=a^2+a^2\cdot(\cos(t))^2-b^2\cdot(\cos(t))^2+2\cdot ea\cdot a\cos(t)\\
&=a^2+\left(a^2-b^2\right)\cdot(\cos(t))^2+2\cdot ea\cdot a\cos(t)\\
&=a^2+e^2\cdot a^2\cdot(\cos(t))^2+2\cdot ea\cdot a\cos(t)\\
&=(a+e\cdot a\cdot(\cos(t)))^2
\end{aligned}$$

Konklusion:

$$\left|\overrightarrow{PF_1}\right|=a+e\cdot a\cdot(\cos(t))$$

Øvelse 12

Vis efter samme opskrift følgende:

a) $\left(\left|\overrightarrow{F_2P}\right|\right)^2 = \left(a - e\cdot a\cdot\left(\cos(t)\right)\right)^2$, hvoraf: $\left|\overrightarrow{F_2P}\right| = a - e\cdot a\cdot\left(\cos(t)\right)$

b) $\overrightarrow{PF_1}\cdot\vec{r}'(t) = e\cdot a\cdot\sin(t)\cdot\left(a + e\cdot a\cdot\left(\cos(t)\right)\right)$

c) $\overrightarrow{F_2P}\cdot\vec{r}'(t) = e\cdot a\cdot\sin(t)\cdot\left(a - e\cdot a\cdot\left(\cos(t)\right)\right)$

Øvelse 13

Indsæt nu de fundne udtryk i formlerne for $\cos(u)$ og $\cos(v)$, og konkluder, at $\cos(u) = \cos(v)$, hvoraf vi kan slutte, at $u = v$: Brændstrålernes vinkel med tangenten er lige store. Derfor vil et signal udsendt fra det ene brændpunkt og reflekteret i overfladen af elipsoiden, samme ned i det andet brændpunkt.