ISBN 9788770668699

Projekt 7.3 Firkantstrigonometri og Ptolemaios sætning i cykliske firkanter

Trigonometrien til beregning af ukendte vinkler, sider og arealer for trekanter er stort set udtømt med udledning af sinusrelationerne, cosinusrelationerne og arealformlerne. Men der findes også en firkantstrigonometri med cosinusrelationer og arealformler. Det er genstanden for dette projekt. Projektet har hovedsagelig teoretisk karakter. Det kan suppleres af projekt 1.1 i kapitel 1, hvor vi både arbejder eksperimentelt og teoretisk med løsning af geometriske optimeringsopgaver, dvs. opgaver, hvor vi under bestemte betingelser skal bestemme det størst mulige areal eller mindst mulige omkreds.

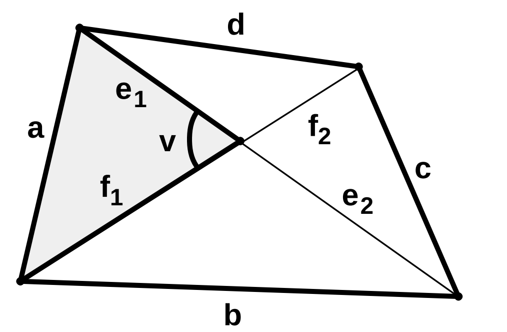
Sætning 1 (Cosinusrelationen for firkanter)
For en konveks firkant med siderne *a*, *b*, *c* og *d* samt diagonalerne *e* og *f* og diagonalvinklen *v* gælder:

$$a^2+c^2=b^2+d^2-2\cdot e\cdot f\cdot\cos(v)$$

Bevis
Diagonalerne *e* og *f* deler hinanden i stykkerne e_1, e_2, f_1 og f_2. Diagonalvinklen overfor siden *a* kaldes *v*. De øvrige diagonalvinkler er da 180° – *v*, *v* og 180° – *v*.

Ved at anvende cosinusrelationerne på de fire trekanter udspændt af diagonalstykkerne og udnytte at $\cos(180°-v)=-\cos(v)$ fås da:

$$\begin{aligned}
a^2&=e_1^2+f_1^2-2\cdot e_1\cdot f_1\cdot\cos(v)\\
b^2&=f_1^2+e_2^2+2\cdot f_1\cdot e_2\cdot\cos(v)\\
c^2&=e_2^2+f_2^2-2\cdot e_2\cdot f_2\cdot\cos(v)\\
d^2&=f_2^2+e_1^2+2\cdot f_2\cdot e_1\cdot\cos(v)
\end{aligned}$$



Lægger vi ligningerne for a^2 og c^2 sammen og tilsvarende for b^2 og d^2 sammen fås:

$$\begin{aligned}
a^2+c^2&=e_1^2+e_2^2+f_1^2+f_2^2-2\cdot(e_1\cdot f_1+e_2\cdot f_2)\cdot\cos(v)\\
b^2+d^2&=e_1^2+e_2^2+f_1^2+f_2^2+2\cdot(e_2\cdot f_1+e_1\cdot f_2)\cdot\cos(v)
\end{aligned}$$

Trækker vi dem dernæst fra hinanden fås endelig den fundamentale sammenhæng:

$$\begin{aligned}
(b^2+d^2)-(a^2+c^2)&=2\cdot(e_1\cdot f_1+e_2\cdot f_2+e_1\cdot f_2+e_2\cdot f_1)\cdot\cos(v)\\
&=2\cdot(e_1+e_2)\cdot(f_1+f_2)\cdot\cos(v)\\
&=2\cdot e\cdot f\cdot\cos(v)
\end{aligned}$$

Heraf følger påstanden ved at rykke om på leddene.

Øvelse 1: Hvad sker der, hvis siden *c* klapper sammen, dvs. vi sætter *c* = 0? Hvilken sætning svarer det til?

Bemærkning: Vi kan specielt se på tilfældet, hvor diagonalvinklen *v* er ret. I så fald gælder cos(*v*) = 0 og dermed fås: $a^2+c^2=b^2+d^2$.
Men hvis der på den anden side gælder, at $a^2+c^2=b^2+d^2$, så må også cos(*v*) = 0. Vi har derfor vist:

Sætning 2 (Pythagoras for firkanter)
Diagonalerne i en konveks firkant med siderne *a*, *b*, *c* og *d* står vinkelret på hinanden, netop når summen af kvadraterne på modstående sider er ens:

$$a^2+c^2=b^2+d^2$$

Bemærkning: Denne sætning viser bl.a. at enten er diagonalvinklen i en firkant med fire opgivne sider *a*, *b*, *c* og *d* *altid* ret eller også bliver den det *aldrig*!

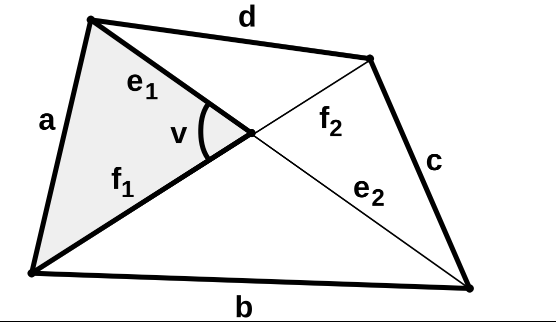
Øvelse 2: Hvad sker der, hvis siden *c* klapper sammen, dvs. vi sætter *c* = 0? Hvilken sætning svarer det til?

Sætning 3 (Arealformlen for firkanter)
For en konveks firkant med siderne *a*, *b*, *c* og *d* samt diagonalerne *e* og *f* og diagonalvinklen *v* gælder:
$T = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin(v)$.

Bevis:
Som før deler diagonalerne *e* og *f* hinanden i stykkerne e_1, e_2, f_1 og f_2. Diagonalvinklerne er *v*, 180° – *v*, *v* og 180° – *v*.

Ved at anvende arealformlen for trekanter på de fire trekanter frembragt af diagonalerne og udnytte at $\sin(180° - v) = \sin(v)$ fås da:

$$T_1 = \tfrac{1}{2} \cdot e_1 \cdot f_1 \cdot \sin(v), \quad T_2 = \tfrac{1}{2} \cdot e_2 \cdot f_1 \cdot \sin(v)$$
$$T_3 = \tfrac{1}{2} \cdot e_2 \cdot f_2 \cdot \sin(v), \quad T_4 = \tfrac{1}{2} \cdot e_1 \cdot f_2 \cdot \sin(v)$$



Lægger vi de fire arealer sammen fås netop:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot (e_1 \cdot f_1 + e_2 \cdot f_1 + e_2 \cdot f_2 + e_1 \cdot f_2) \cdot \sin(v) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot (e_1 + e_2) \cdot (f_1 + f_2) \cdot \sin(v) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin(v) \end{aligned}$$

Øvelse 3: Hvad sker der, hvis siden *c* klapper sammen, dvs. vi sætter *c* = 0? Hvilken sætning svarer det til?

Denne arealformel er den simpleste for en firkant, men den findes også i to andre varianter. Vi kan nemlig dels eliminere diagonalerne *e* og *f*, dels eliminere diagonalvinklen *v*.

Sætning 4 (Alternative arealformler)
Arealet *T* for en konveks firkant med siderne *a*, *b*, *c* og *d* samt diagonalerne *e* og *f* og diagonalvinklen *v* opfylder de følgende to sammenhænge:

1) $T = \frac{1}{4} \cdot \left(\left(b^2 + d^2\right) - \left(a^2 + c^2\right) \right) \cdot \tan(v)$

(hvor det forudsættes at diagonalvinklen *v* ikke er ret! Hvis vinklen er ret er tangens ikke defineret).

2) $T^2 = \frac{1}{4} \cdot e^2 \cdot f^2 - \left(\frac{\left(b^2 + d^2\right) - \left(a^2 + c^2\right)}{4} \right)^2$

Bevis:
Udgangspunktet er arealformlen og cosinusrelationen, der omskrives på formen:

$$4T = 2\cdot e\cdot f\cdot \sin(v)$$
$$\left(b^2+d^2\right)-\left(a^2+c^2\right) = 2\cdot e\cdot f\cdot \cos(v)$$

a) Ved division af de to ligninger med hinanden går diagonalerne *e* og *f* ud og vi finder:

$$\frac{4T}{\left(b^2+d^2\right)-\left(a^2+c^2\right)} = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \tan(v) \quad \Rightarrow$$
$$T = \tfrac{1}{4}\cdot\left(\left(b^2+d^2\right)-\left(a^2+c^2\right)\right)\cdot\tan(v)$$

b) Ved at kvadrere de to ligninger og lægge dem sammen går *v* ud i kraft af trigonometriens Pythagoras:
$\sin^2(v)+\cos^2(v)=1$.
Først kvadreres de to ligninger:

$$16\cdot T^2 = 4\cdot e^2\cdot f^2\cdot\sin^2(v)$$
$$\left(\left(b^2+d^2\right)-\left(a^2+c^2\right)\right)^2 = 4\cdot e^2\cdot f^2\cdot\cos^2(v)$$

Dernæst lægges de to ligninger sammen:

$$16\cdot T^2+\left(\left(b^2+d^2\right)-\left(a^2+c^2\right)\right)^2 = 4\cdot e^2\cdot f^2\cdot\sin^2(v)+4\cdot e^2\cdot f^2\cdot\cos^2(v)$$
$$= 4\cdot e^2\cdot f^2\cdot\left(\sin^2(v)+\cos^2(v)\right) = 4\cdot e^2\cdot f^2$$

Isoleres T^2 fra denne ligning fås netop den ønskede formel.

For en firkant med *faste* sidelængder *a*, *b*, *c* og *d* er forskellen på kvadratsummerne for de modstående sider, dvs. $(b^2+d^2)-(a^2+c^2)$, nu en konstant. De to nye arealformler viser derfor at arealet af en konveks firkant med givne sidelængder afhænger på simpel vis af dels diagonalvinklen *v* (hvis denne *ikke* er ret), dels af diagonalernes produkt $e\cdot f$.

Den første formel viser, at arealet af firkanten *T* er proportionalt med tangens til den spidse diagonalvinkel *v*, dvs. tan(*v*). Når vi deformerer en firkant – hvor diagonalvinklen *v* ikke er ret – finder vi derfor det størst mulige areal, netop når den spidse diagonalvinkel er størst mulig (idet tangensfunktionen er voksende for spidse vinkler).

Den anden formel viser tilsvarende, at forskellen mellem kvadratet på arealet *T* og kvadratet på det halve diagonalprodukt $\frac{1}{2}\cdot e\cdot f$ er konstant. Men det viser at kvadratet på arealet dvs. T^2, er størst mulig, netop når kvadratet på diagonalproduktet, dvs. $(e\cdot f)^2$, er størst muligt. Men dermed gælder også, at arealet *T* er størst muligt, netop når diagonalproduktet *e·f* er størst muligt (idet kvadratfunktionen er voksende for positive tal).

Sætning 5
For en konveks firkant med faste sidelængder *a*, *b*, *c* og *d* topper de følgende tre størrelser derfor samtidigt:

1. Firkantens areal *T*.
2. Firkantens spidse diagonalvinkel *v*.
3. Firkantens diagonalprodukt *e ·f*.

Dermed har vi på elementær vis gjort rede for de fleste af de observationer vi (forhåbentligt) har gjort i vores eksperimentelle undersøgelse af firkantens areal.

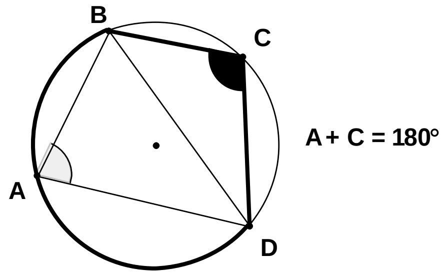
Vi mangler nu kun at gøre nærmere rede for de præcise omstændigheder, hvorunder firkantens areal er maksimalt.

ISBN 9788770668699

Cykliske firkanter og Ptolemaios sætning

Vi vil nu se nærmere på firkanter, der har en omskrevet cirkel – såkaldte *cykliske firkanter*.

Vinklerne i en cyklisk firkant er supplementvinkler. Det skyldes at en periferivinkel er halvt så stor som den bue, den spænder over. To modstående vinkler, fx A og C, i en cyklisk firkant spænder over hele cirklens omkreds, dvs. 360°, hvorfor de to vinkler tilsammen spænder over det halve gradtal, dvs. $A + C = 180°$.
Det omvendte gælder også, som det fremgår af den følgende sætning.



Sætning 6
En firkant er cyklisk, netop når modstående vinkler er supplementvinkler.

Men ikke blot er der en simpel forbindelse mellem de fire vinkler i en cyklisk firkant. Der er også en simpel forbindelse mellem de fire sider AB, BC, CD og DA samt diagonalerne AC og BD i en cyklisk firkant:

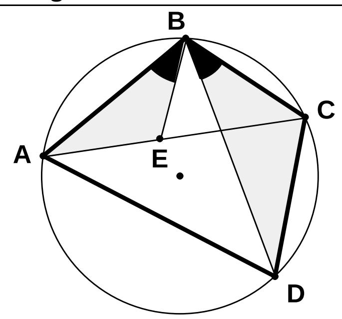
Sætning 7 (Ptolemaios sætning)
Produktet af diagonalerne i en cyklisk firkant er lig med summen af produkterne af de modstående sider:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

Bevis
Vi afsætter punktet E på diagonalen AC, så vinklerne ved B, dvs. ABE og DBC er lige store:

Men vinklerne ved A og D er også lige store, da de spænder over samme bue. De to trekanter AEB og DCB er altså ensvinklede og dermed ligedannede, hvorfor vi slutter:

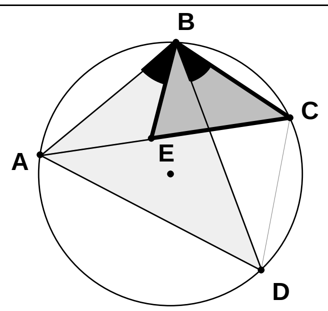
$$\frac{AE}{CD} = \frac{AB}{BD} \quad \Leftrightarrow \quad AE \cdot BD = AB \cdot CD$$



På samme måde er trekanterne ADB og ECB ensvinklede, fordi vinklerne ved B per konstruktion er lige store, mens vinklerne ved C og D spænder over samme bue.

Denne gang slutter vi derfor at der gælder:

$$\frac{EC}{DA} = \frac{BC}{BD} \quad \Leftrightarrow \quad EC \cdot BD = BC \cdot DA$$



Lægger vi de fundne ligninger sammen fås:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AE \cdot BD + EC \cdot BD$$
$$= (AE + EC) \cdot BD = AC \cdot BD$$

Hermed er sætningen vist.
Denne vigtige sammenhæng går tilbage til den store græske astronom Ptolemaios fra det andet århundrede, der gjorde den til en hjørnesten i den græske trigonometri.

Øvelse 6
Hvad svarer Ptolemaios sætning til for et rektangel?

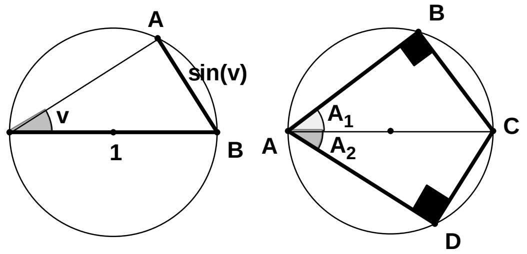
ISBN 9788770668699

Øvelse 7

1) I en cirkel med diameteren 1 spænder periferivinklen *v* over korden *AB*. Vis at *AB* = sin(*v*) (se figur a).

2) Gøre rede for, at hvis én af diagonalerne i en cyklisk firkant *ABCD* er en diameter, vil firkanten være dobbelt retvinklet med diagonalen som fælles hypotenuse. Antag at diameteren er 1. Vis at Ptolemaios sætning netop svarer til additionsformlen for sinus, dvs. (se figur b);

$$\sin(A_1 + A_2) = \sin(A_1)\cdot\cos(A_2) + \sin(A_2)\cdot\cos(A_1)$$



Figur a. Figur b