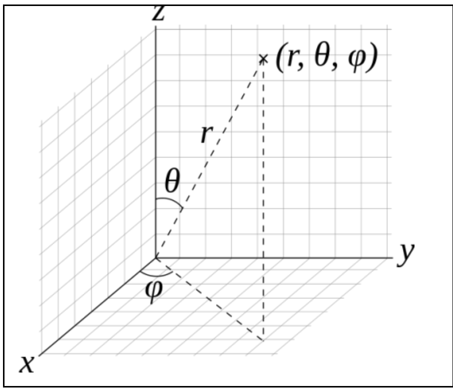
ISBN 9788770668699

Projekt 7.13 Sfærisk geometri og introduktion til kortprojektioner

Et almindeligt 3D-koordinatsystem er som et 2D-koordinatsystem, hvor der blot er rejst en tredje akse vinkelret på planen i punktet (0,0), som herefter hedder (0,0,0). Akserne tegnes normalt som på figuren herunder til venstre. (Man kalder det et "højrehåndskoordinatsystem", fordi man kan illustrere akserne med højre hånds tommel-, pege-, og langefinger. Prøv! Et punkts xyz-koordinater findes på samme måde som i planen, ved at man går vinkelret ind på hver akse og aflæser værdien, se illustrationen til højre.



Et punkts **sfæriske koordinater** består også af tre tal som angivet på figuren. Når vi vil regne på afstande og vinkler på jordkloden antager vi, at denne er kuglerund, dvs *r* er et fast tal (6376 km). Det noterer vi os en gang for alle, og anvender herefter to koordinater, φ der angiver længdegraden, og θ = 90-*b*, hvor *b* angiver breddegraden *b*.

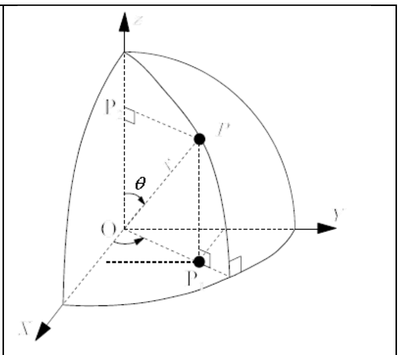
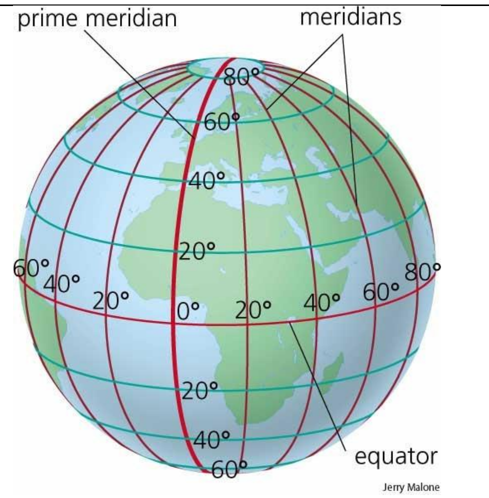


Fig. 1.7. *Sfæriske koordinater*

En **storcirkel** på kuglen er den størst mulige cirkel, der kan lægges omkring kuglen (fx Jorden). Ækvator-cirklen er ét eksempel på en storcirkel. Cirklen der går gennem nord- og sydpolen er et andet. Men der kan lægges storcirkler på alle mulige måder.

Meridianen for et punkt på Jorden er den halve storcirkel, som forbinder nordpolen og sydpolen, og som går igennem det pågældende punkt.

Længdegraden angiver den vinkel, som den lodrette plan genne punktet og centrum, er drejet væk fra 0-meridianen. Drejes i Danmarks retning kaldes det østlig længde, drejes modsat kaldes det vestlig længde.



0-meridianen i Greenwich

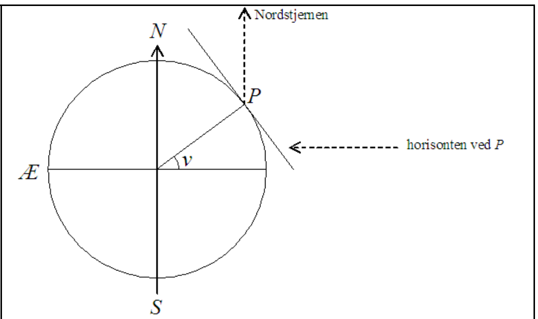
Øvelse 1

Antag, at du har et pålideligt ur, som viser den nøjagtige tid, da du sejler ud fra din hjemhavn. Hvordan kan du bruge uret til at finde ud af, hvilken længdegrad du er kommet til?

Breddegraden angiver den vinkel som en linje gennem centrum og punktet danner med ækvatorplanet. Det er *v* på illustrationen.

Øvelse 2

Argumenter ved hjælp af tegningen for, hvordan man en stjerneklar nat kan bestemme sin egen breddegrad.



ISBN 9788770668699

Øvelse 3
1. Breddegrad og længdegrad er ofte angivet i grader, minutter og sekunder i stedet for i decimaltal. Hvad er minutter og sekunder og hvordan omregnes de til decimaltal?
2. Find fx via nettet Københavns længdegrad og breddegrad. Hvis de er angivet i minutter og sekunder, så omregn det til decimaltal
3. Hvad er Københavns sfæriske koordinater.

Øvelse 4.
1. Jordens omkreds regnes for nemheds skyld til at være 40.000 km. Hvor langt er der fra København til Nordpolen?
2. Hvad er omkredsen af den breddecirkel København ligger på?
3. To punkter A og B på Ækvator har længdegraderne henholdsvis 12° østlig længde og 87° vestlig længde. Hvor langt er der imellem de to punkter.

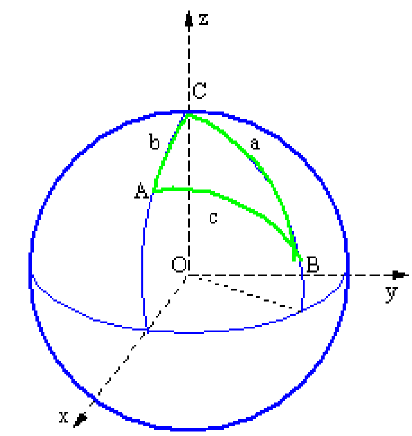
Sammenhængen mellem sfæriske koordinater og de traditionelle xyz-koordinater er følgende:
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\sin\theta\cdot\cos(\phi) \\ r\cdot\sin\theta\cdot\sin(\phi) \\ r\cdot\cos\theta \end{pmatrix}$, eller hvis vi vælger at regne på en enhedskugle: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cdot\cos(\phi) \\ \sin\theta\cdot\sin(\phi) \\ \cos\theta \end{pmatrix}$
I sidste tilfælde skal vi så blot huske at gange op med radius til sidst.

Øvelse 5
Anvend illustrationerne i starten og jeres notater til at argumentere for denne formel. (*Bemærk, at* θ *ikke er breddegraden, men er* $90° - \text{bredden}$)

Afstande regnes altid langs storcirkler, fordi man kan vise, at dette er den korteste afstand på kugleoverfladen. Storcirkler på en kugleoverflade svarer derfor til linjer, for den korteste afstand mellem to punkter i planen er jo altid den rette linje mellem dem.

Øvelse 6
Gennem to punkter på en kugle kan der normalt altid tegnes præcis én storcirkel, ligesom der i planen kan tegnes én linje gennem to punkter. Der er dog undtagelser på en kugleoverflade, hvor der faktisk kan tegnes flere storcirkler gennem punkterne. Hvad er det for tilfælde?

Tre punkter danner således ved hjælp af storcirkler **en sfærisk trekant**.



Koordinaterne for et punkt *P* er det samme som koordinaterne for vektoren $\overrightarrow{OP}$. Koordinaterne for punkterne *A*, *B* og *C* er derfor de samme som koordinaterne for $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ og $\overrightarrow{OC}$.

Vi erindrer fra bog 1, at **Skalarproduktet** af to vektorer er defineret som: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$.

ISBN 9788770668699

Øvelse 7

1. Argumenter ved hjælp af Pythagoras for, at $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

2. Vis, at $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

Regneregel for skalarprodukt:
I bog 1 kan du finde beviser for følgende regneregler:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $\quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ $\quad \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$ $\quad (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$

Repeter beviset for den vigtige formel: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$, hvor v er vinklen mellem vektorerne:

Øvelse 8

Tegn en trekant dannet af vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, og udregn $\left(\vec{c}\right)^2 = \vec{c} \cdot \vec{c}$ som et skalarprodukt. Udregn $|\vec{c}|^2 = c^2$, hvor c er sidelængden, ved hjælp af cosinusrelationen. Anvend nu øvelse 7 til at opstille en ligning, der kan reduceres formlen $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$

Denne formel fortæller blandt andet det mærkelige, at skalarproduktet, der er defineret ud fra koordinaterne, er uafhængigt af valg af koordinatsystem. Det afhænger kun af længder og vinklen imellem vektorerne. Men det betyder, at vi selv kan bestemme hvor vi vil lægge koordinatsystemet, så udregningerne bliver simplest mulige. Når vi vil udlede formler til beregning af ukendte sider og vinkler i sfæriske trekanter, så kan vi vælge at lægge koordinatsystemet, så det ene af de tre punkter ligger i nordpolen, det andet ligger på 0-meridianen, og det tredje ligger et eller andet sted på kuglen. Se illustrationen.

Øvelse 9
1. Opskriv de sfæriske koordinater til den sfæriske trekants hjørner.
2. Udregn skalarproduktet $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ dels ud fra definitionen, og dels ud fra formlen, idet vi regner på en enhedskugle, hvor radius er 1. Vis her ud fra den sfæriske cosinusrelation:

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(C)$$

Havde vi valgt at lade Nordpolen ligge i et af de andre punkter osv., så havde vi ved symmetri fået følgende andre udgaver af cosinusrelationerne:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(A)$$
$$\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos(B)$$

Øvelse 10
København ligger på 55°,42’ Nordlig bredde og 12°35’ østlig længde.
Los Angeles ligger på 34°,0’ Nordlig bredde og 118°10’ vestlig længde.
Søndre Strømfjord i Grønland ligger på 68°,0’ Nordlig bredde og 54°0’ vestlig længde.
Beregn afstanden København - Los Angeles.
Beregn afstanden hvis et fly først flyver direkte til Søndre Strømfjord, og derfra videre direkte til Los Angeles.

Øvelse 11
København ligger noget længere mod nord end Los Angeles. Hvis et fly tager den direkte destination mod Los Angeles, I hvilken retning skal man så flyve? Svar med en vinkel i forhold til meridianer eller i forhold til breddecirkler.

ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 12
Da Columbus sejler ud i 1492 sker det fra den portugisiske havneby Palos der ligger ved Rio Tintos udløb. Palos koordinater er 37°14’ nordlig bredde, 6°54’ vestlig længde. Han landede på en ø, han selv kaldte San Salvador, men som siden er levet kaldt Watling. Koordinaterne her er 24°5’ nordlig bredde og 74° vestlig længde. Hvor langt er der?

Øvelse 13
1) I plangeometri er formlen for cosinusrelationerne:

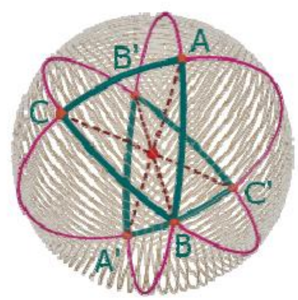
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

Hvis trekanten er en retvinklet trekant med vinkel *C som* den rette, så bliver cosinusrelationerne til formlen for Pythagoras. Hvorfor?
2) Hvis vi i sfærisk geometri har en retvinklet trekant hvor *C* som den rette, hvordan ser da cosinusrelationerne ud? Denne formel kaldes for *den sfæriske Pythagoras.*

Sfæriske trekanters vinkelsum og areal

En sfærisk trekant er bestemt ved hjælp af tre storcirkler, ligesom en almindelig trekant er bestemt ved tre linjer.

Betragt den sfæriske trekant *ABC* på figuren. For ethvert punkt *P* på en kugle ligger der et punkt *P’* på den anden side af kuglen: At de ligger modsat kan udtrykkes ved, at den rette linje gennem *P* og *P’* går gennem centrum af kuglen. Sådanne punkter kaldes også antipodiske. Nordpolen og Sydpolen er således antipodiske. I ældre tider anvendte man ordet *antipoder* som betegnelse for de mennesker, der boede diametralt modsat os, dvs. dem vi havde under fødderne. På den anden side af Danmark er vi i Stillehavet. Det samme gælder for det meste af Europa. Men fx New Zealands hovedstad Wellington er antipodisk til den spanske by Valladolid. På adressen http://da.wikipedia.org/wiki/Antipode kan man på et verdenskort se, hvilke punkter, der er antipodiske på Jorden.



Tegner man to storcirkler, så vil de skære hinanden i antipodiske punkter. Tegner man en sfærisk trekant *ABC* ved hjælp af tre storcirkler, så tegnes samtidig en antipodisk trekant $A'B'C'$. Lad os kalde viklerne i trekant *ABC* for α, β, og γ, se figurerne nedenfor.

De to storcirkler gennem punkterne *A* og A' danner to (blå) tokanter, der dækker en vis del af kuglens overflade bestemt af vinkel *A*. Lad os betegne kuglens overfladeareal med *O*. Så gælder fro hver tokant:

$$\text{Areal}(\text{Tokant } AA') = \frac{\alpha}{360} \cdot O$$

Tilsvarende med de to storcirkler gennem punktet *B* og de to gennem punktet *C*:

$$\text{Areal}(\text{Tokant } BB') = \frac{\beta}{360} \cdot O \qquad \text{og} \qquad \text{Areal}(\text{Tokant } CC') = \frac{\gamma}{360} \cdot O$$

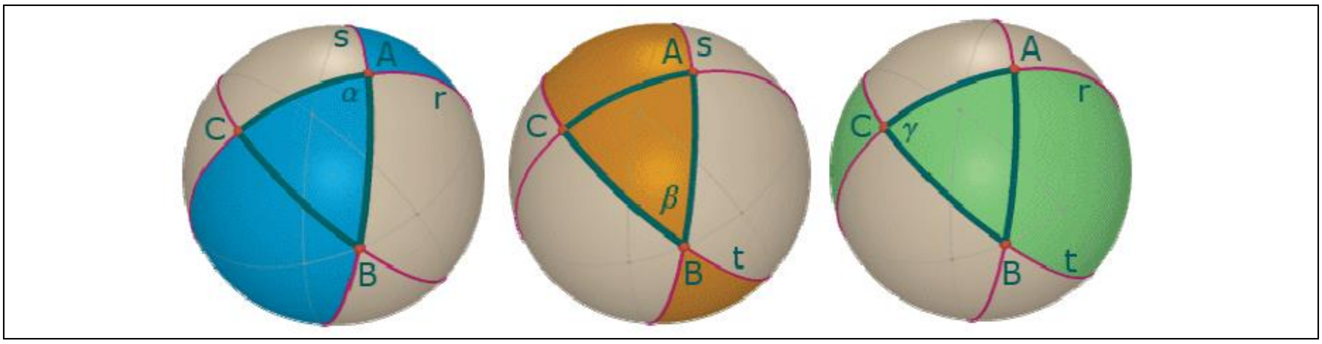
Vi lægger nu mærke til, at disse 6 tokanter tilsammen dækker kuglens overflade, og at hver af dem indeholder trekanterne *ABC* og $A'B'C'$. Dvs at summen af arealerne af de 6 tokanter er lig med kugleoverfladens areal plus to ekstra af hver af trekanterne *ABC* og $A'B'C'$:

$$2 \cdot \text{Areal}(\text{Tokant } AA') + 2 \cdot \text{Areal}(\text{Tokant } BB') + 2 \cdot \text{Areal}(\text{Tokant } CC') = O + 4 \cdot \text{Areal}(\text{Trekant } ABC)$$

Indsæt formlerne for arealerne af tokanterne:

$$2 \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot O + 2 \cdot \frac{\beta}{360} \cdot O + 2 \cdot \frac{\gamma}{360} \cdot O = O + 4 \cdot \text{Areal}(\text{Trekant } ABC)$$

ISBN 9788770668699



Øvelse 14
Vis nu selv følgende omskrivninger af ligningen:

$$4\cdot \text{Areal(Trekant } ABC) = \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{180}\right)\cdot O - O$$

$$\text{Areal(Trekant } ABC) = \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{720}\right)\cdot O$$

Det sidste er **formlen for arealet af en sfærisk trekant.**

Kuglens overfladeareal er $O = 4\cdot\pi\cdot r^2$, hvor r er kuglens radius. Indsættes dette ser formlen således ud:

$$\text{Areal(Trekant } ABC) = \frac{(\alpha+\beta+\gamma-180)\cdot\pi\cdot r^2}{180}$$

Tallet $E = \alpha+\beta+\gamma-180$ kaldes for *den sfæriske trekants exces*. Den engelske matematiker og astronom Thomas Harriot (1560-1621) beviste i 1603 denne formel for arealet af trekanten. Han publicerede det ikke, så i matematikhistorien kaldes sætningen for Girards sætning, opkaldt efter Albert Girard, der var den første der publicerede et bevis.

Sætning. Arealet af en sfærisk trekant.
En sfærisk trekant på en kugle med radius *r*, og som har en excess på E er givet ved formlen:

$$\text{Areal} = \frac{E\cdot\pi\cdot r^2}{180}$$

eller hvis vinklerne måles i radianer, hvor $180° = \pi$:

$$\text{Areal} = E\cdot r^2$$

Det er en meget overraskende sætning, da den siger, at arealet kun afhænger af vinklerne. Det betyder bla., at der ikke kan være ensvinklede trekanter af forskellig størrelse på en kugle. Er trekanter ensvinklede er de helt kongruente (kan dække hinanden).

Øvelse 15
1) Fyns areal er ca 3000 km^2 og Bornholms ca 600 km^2. Lad os sige, vi kan lægge trekanter på hver af de to øer, hvis areal er det halve af øens areal. Hvad er vinkelsummen i sådanne trekanter?
2) Tegn en trekant mellem Skagen, Tønder og København. Hvor stort et areal har den?

Øvelse 16
Et areal kan ikke være negativ. Argumenter for, at **vinkelsummen i en sfærisk trekant altid er over** $180°$**.**

Øvelse 17
En sfærisk trekant kan ikke fylde mere end en halv jordklode. Argumenter for, at **den øvre grænse for vinkelsummen i en sfærisk trekant er** $540°$**.**

ISBN 9788770668699

Kortprojektioner

Vi ved godt, at man ikke kan klippe en kugle op på en smart måde så vi får et fladt kort, der ikke er deformeret på en eller anden måde. Sætningen ovenfor beviser nu for os hvorfor: Trekanter på kuglen vil blive deformeret, når de overføres til en plan tegning, for her er vinkelsummen 180°. Det indgår i sætningen nedenfor.

Kort laves ved hjælp af forskellige typer af kortprojektioner. Det ideelle kort skulle være et, hvor:
1. Afstandsforhold er bevaret.
2. Vinkler er bevaret.
3. Arealforhold er bevaret.
4. Storcirkelbuer afbildes i rette linier.

At afstandsforhold bevares betyder, at der findes en skalafaktor (et målestoksforhold), så afstande i naturen omsættes til afstande i kortet ved at multiplicere med skalafaktoren.

Sætning. Umuligheden af at lave præcise kort
1. Der findes ikke kortprojektioner, hvor storcirkler afbildes i linjer, og hvor vinkler samtidig er bevaret.

Bevis:
Lad os antage, at vi har et kort, der afbilder storcirkler i linjer. Lad A, B og C være tre punkter på kuglefladen. Lad os sige at de tre punkter afbildes i punkterne A', B' og C'. I trekant ABC er vinkelsummen større end 180°. Da vinkler er bevaret i kortet, er vinkelsummen det også. Men i trekant $A'B'C'$ er vinkelsummen 180° og det kan jo ikke passe. Altså findes der ikke sådan et kort.

Man kan vise, at hvis et kort opfyldte betingelse 1, så ville det også opfylder de tre andre. Men betingelse 2 og 4 kan ikke samtidig være opfyldt, så det kan ikke lade sig gøre. Der findes altså heller ikke kort med et fast målestoksforhold. Det er ganske overraskende.

I Danmark bruger vi den såkaldte Mercatorprojektion til søkort, vi bruger UTM, Universal Transversal Mercator, for landområderne. De er begge vinkelbevarende, hvilket er en stor fordel, når man på søen eller i luften skal navigere og lægge en fast kurs: Den kan tegnes med en lineal!

Emner navigation og kortprojektion er gode emner til studieretningsprojekter i fag som matematik og historie.