ISBN 9788770668699

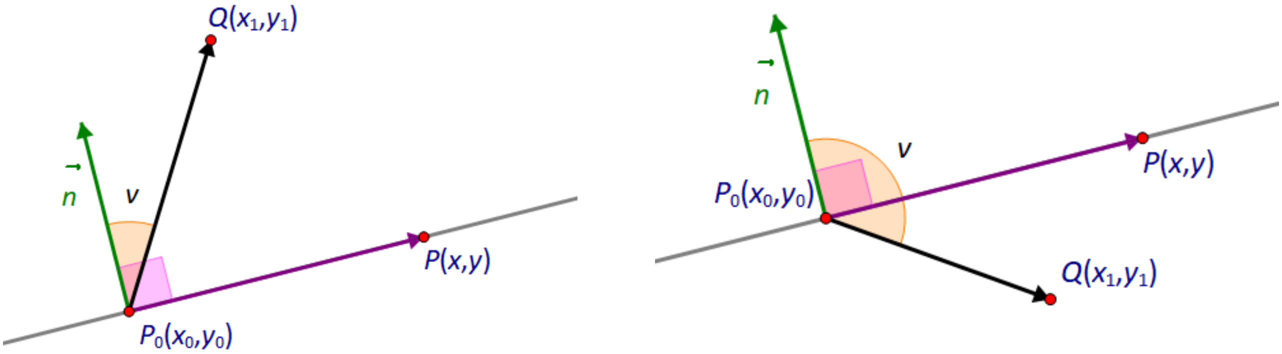
Projekt 7.11 Punkters beliggenhed i forhold til en linje i 2d eller en plan i 3d

1. Punkters beliggenhed i forhold til en linje i planen

Vi ser på en linje *l* med ligningen $a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)=0$, dvs. $P(x_0,y_0)$ er et fast punkt i α og $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ er en normalvektor for *l*. Vi afsætter normalvektorens begyndelsespunkt i P_0, således at $\overrightarrow{P_0P}$ og $\vec{n}$ har fælles udgangspunkt, som vist på figuren.

Vi ved at *P* ligger på *l*, netop når $\overrightarrow{P_0P}$ og $\vec{n}$ er ortogonale. Og kender vi ligningen for planen, kan vi jo bare sætte punktet ind og se om ligningen går op! Undersøg fx om punktet $C(1,4)$ ligger på den linje *l*, der har ligningen $2\cdot x+3\cdot y-14=0$.

Hvis derimod vinklen mellem $\overrightarrow{P_0P}$ og $\vec{n}$ er spids, så ligger *P* på samme side, som den side normalvektoren peger ud til. Omvendt, hvis vinklen mellem $\overrightarrow{P_0P}$ og $\vec{n}$ er stump, så ligger *P* på den modsatte side af, den hvor normalvektoren peger ud til. Vi kan således let afgøre om to punkter ligger på hver sin side af en ret linje.



Vi vil undersøge om punkterne $A(-1,4)$ og $B(4,5)$ ligger på hver sin side af *l*. Først bestemmer vi et punkt $P_0(x_0,y_0)$ på *l*. Vi sætter blot den ene af punktets koordinater til at være fast, og så regner vi os frem til den anden koordinat. Typisk vælger man en af koordinaterne til at være nul. Her er det fx let, hvis vi sætter $y_0=0$ og er $x_0=7$ .Dvs. $P_0(7,0)$ er et punkt på *l*. Vi bestemmer forbindelsesvektorerne:

$$\overrightarrow{P_0A}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP_0}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \overrightarrow{P_0B}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP_0}==\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$$

Nu kan vi bestemme vektorernes vinkler med normalvektoren $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Vi anvender skalarproduktformlen $\cos(v)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$:

$$\cos(v_A)=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0A}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{P_0A}|}=\frac{-4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{80}}=-0{,}124 \text{ dvs. } v_A=97{,}13^\circ>90^\circ$$

$$\cos(v_B)=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0B}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{P_0B}|}=\frac{9}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{18}}=0{,}588 \text{ dvs. } v_B=53{,}96^\circ<90^\circ$$

Altså ligger *A* og *B* på hver sin side af planen.

Øvelse 1.1
Konstruer situation i eksemplet i et værktøjsprogram, og konstruer rette linjer vinkelret på linjen gennem A og B, og benyt disse til at argumentere for punkternes placering i forhold til linjen.

ISBN 9788770668699

Øvelse 1.2
Undersøg både ved konstruktion og beregning, om punkterne $A(5,2)$ og $B(4,8)$ ligger på hver sin side af linjen med ligningen $x-y-8=0$.

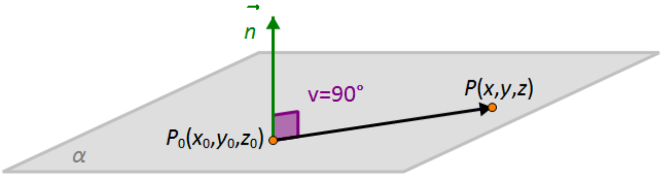
Øvelse 1.3
Undersøg både ved konstruktion og beregning, om punkterne $A(5,2)$ og $B(1,-3)$ ligger på samme side af linjen med ligningen $2\cdot x-3\cdot y-7=0$.

Læg mærke til, at udtrykket i tælleren, fx $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0A}$ er præcis det udtryk, der står i tælleren i dist-formlen, når vi indsætter punktet *A*'s koordinater. Og det udtryk vi indsætter *A*'s koordinater i er linjens ligning! Vi konkluderer derfor:

Praxis
Antag vi har givet en linje og to punkter *A* og *B*. Indsæt punkternes koordinater i linjens ligning.
Så gælder:
1. Hvis de to udtryk har samme fortegn ligger de to punkter på samme side af linjen.
2. Hvis de to udtryk har modsat fortegn ligger de to punkter på hver sin side af linjen.
3. Hvis et af udtrykkene er lig med 0, så ligger pågældende punkt på linjen.

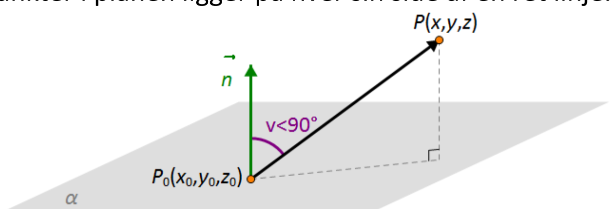
2. Punkters beliggenhed i forhold til en plan i rummet

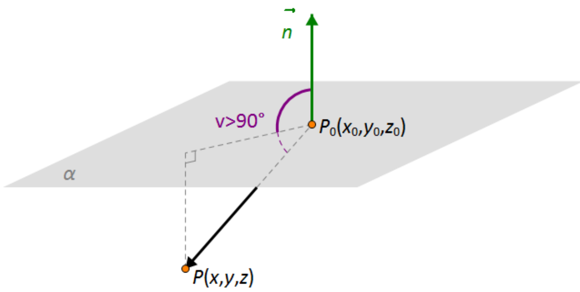
Vi ser på en plan α med ligningen $a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0)+z\cdot(z-z_0)=0$, dvs. $P(x_0,y_0,z_0)$ er et fast punkt i α og $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ er en normalvektor for α. Vi afsætter normalvektorens begyndelsespunkt i P_0, således at $\overrightarrow{P_0P}$ og $\vec{n}$ har fælles udgangspunkt, som vist på figuren.



Vi ved at *P* ligger i α, netop når $\overrightarrow{P_0P}$ og $\vec{n}$ er ortogonale. Og kender vi ligningen for planen, kan vi jo bare sætte punktet ind og se om ligningen går op! Undersøg fx om punktet $C(1,-2,-3)$ ligger i den plan α, der har ligningen $2\cdot x+3\cdot y-5\cdot z-11=0$.

Hvis derimod vinklen mellem $\overrightarrow{P_0P}$ og $\vec{n}$ er spids, så ligger *P* på samme side, som den side normalvektoren peger ud til. Omvendt, hvis vinklen mellem $\overrightarrow{P_0P}$ og $\vec{n}$ er stump, så ligger *P* på den modsatte side af, den hvor normalvektoren peger ud til. Vi kan således let afgøre om to punkter ligger på hver sin side af en plan – eller analogt hertil, om to punkter i planen ligger på hver sin side af en ret linje.





ISBN 9788770668699

Vi vil undersøge om punkterne $A(-1,4,5)$ og $B(4,-3,-6)$ ligger på hver sin side af α. Først bestemmer vi et punkt $P_0(x_0,y_0,z_0)$ i α. Vi sætter blot to af punktets koordinater til at være faste, og så regner vi os frem til den sidste koordinat. Typisk vælger man en af koordinaterne til at være nul og prøver sig frem med den anden, så den tredje også bliver et pænt tal. Her er det fx let, hvis vi sætter $z_0=0$ og $x_0=1$, så får vi nemlig:

$$2\cdot 1+3\cdot y-5\cdot 0-11=0$$
$$3\cdot y-9=0$$
$$y=3$$

Dvs. $P_0(1,3,0)$ er et punkt i α. Vi bestemmer forbindelsesvektorerne:

$$\overrightarrow{P_0A}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP_0}=\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{P_0B}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP_0}==\begin{pmatrix}4\\-3\\-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\\-6\end{pmatrix}$$

Nu kan vi bestemme vektorernes vinkler med normalvektoren $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$.

Vi anvender skalarproduktformlen $\cos(v)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$:

$$\cos(v_A)=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0A}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{P_0A}|}=\frac{-26}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{30}}=0{,}770 \ \text{dvs.}\ v_A=140{,}36^\circ>90^\circ$$

$$\cos(v_B)=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0B}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{P_0B}|}=\frac{18}{\sqrt{38}\cdot 9}=0{,}324 \ \text{dvs.}\ v_B=84{,}11^\circ<90^\circ$$

Altså ligger *A* og *B* på hver sin side af planen.

Øvelse 2.1
Konstruer situation i eksemplet i et 3D-værktøjsprogram, og konstruer rette linjer vinkelret på planen gennem A og B, og benyt disse til at argumentere for punkternes placering i forhold til planen.

Øvelse 2.2
Undersøg både ved konstruktion og beregning, om punkterne $A(5,2,9)$ og $B(4,1,-2)$ ligger på hver sin side af planen med ligningen $x-y+2\cdot z-8=0$.

Læg mærke til, at udtrykket i tælleren, fx $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0A}$ er præcis det udtryk, der står i tælleren i dist-formlen, når vi indsætter punktet *A*'s koordinater. Og det udtryk vi indsætter *A*'s koordinater i er planens ligning! Vi konkluderer derfor:

Praxis
Antag vi har givet en plan i rummet, samt at vi har givet to punkter *A* og *B*. Indsæt punkternes koordinater i planens ligning. Så gælder:
1. Hvis de to udtryk har samme fortegn, ligger de to punkter på samme side af planen.
2. Hvis de to udtryk har modsat fortegn ligger de to punkter på hver sin side planen.
3. Hvis et af udtrykkene er lig med 0, så ligger pågældende punkt i planen.