ISBN 9788770668699

Projekt 7.10 – Miniprojekt om ellipsens tangenter og areal

Da ellipsen er en fladtrykt cirkel arver den mange egenskaber fra cirklen. Fx kan vi uden videre konstruere ellipsetangenter ud fra cirkeltangenter. Vi lægger ud med en øvelse, der formulerer fladtryktheden matematisk:

Øvelse 1: Geometrisk konstruktion af ellipsen

a) Konstruér to cirkler med samme centrum *C* og med radier *a* og *b*. Afsæt et frit punkt *P* på cirklen med radius *a*. Afsæt en halvlinje fra *C* gennem *P*. Den skærer den anden cirkel i *Q*. Konstruér nu en lodret linje gennem *P* og en vandret linje gennem *Q*. De skærer hinanden i punktet *E*. Hvis *P* har koordinaterne (x,y), argumenter så for, at *E* har koordinaterne $(x_1,y_1)=\left(x,\frac{b}{a}\cdot y\right)$

b) Når du trækker i punktet *P* gennemløber punktet *E* en kurve. Konstruér den gerne som et *geometrisk sted* drevet af punktet *P*. Punktet *P*'s koordinater opfylder Pythagoras sætning $x^2+y^2=1$. Vis, at punktet *E*'s koordinater opfylder sætning 2, dvs. *E* beskriver en ellipse.

c) Indlæg et koordinatsystem med begyndelsespunkt i *C*. Tegn graferne for cirkelfunktionerne $f(x)=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ og ellipsefunktionerne $g(x)=\pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$. Konklusion?

Vi fortsætter og inddrager nu tangenterne:

Øvelse 2 : Geometrisk konstruktion af ellipsens tangenter
Konstruer en ellipse som en 'fladtrykt cirkel' fx via konstruktionen fra foregående øvelse

a) Afsæt et frit punkt *P* på ellipsen, og konstruér det punkt *Q* på cirklen (den med radius *a*), som har samme *x*-koordinat som punktet *P*.

b) Konstruér den tilhørende cirkeltangent i *Q*, idet det udnyttes at cirkeltangenten står vinkelret på radius.

c) Cirkeltangenten skærer *x*-aksen i punktet *R*.
Forbind nu ellipsepunktet *P* med punktet *R* på *x*-aksen.
Argumentér for, at der må være tale om en ellipsetangent.

Øvelse 3: Ellipse-tangentens hældningskoefficient
ndlæg et koordinatsystem med begyndelsespunkt C.

a) Argumenter for, at cirkelpunktet *Q* får koordinaterne $(x,\pm\sqrt{a^2-x^2})$.

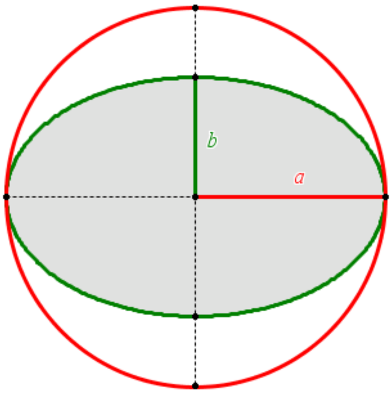
b) Argumentér for, at radius må have hældningskoefficienten: $\pm\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, og at cirkeltangenten må have hældningskoefficienten: $\mp\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

c) Argumenter for, at ellipsetangenten må have hældningskoefficienten: $\mp\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

ISBN 9788770668699

Øvelse 4: Geometrisk argument for ellipsens areal

Et mål for, hvor fladtrykt ellipsen er i forhold til den omskrevne cirkel med radius a, beregnes ved: $k = \frac{b}{a}$.



Ellipsens omskrevne cirkel har arealet $\pi \cdot a^2$, fordi a er storaksen.

Hvis ellipsen er fladtrykt med en faktor $k = \frac{b}{a}$, så vil alle "højder" (lodret fra storaksen ud til cirklen/ellipsen) reduceres med den samme faktor.

Giv et argument for, at vi derfor kan sige, at arealet reduceres med den samme faktor, dvs. ellipsens areal er:

$$Areal_{Ellipse} = \frac{b}{a} \cdot Areal_{Cirkel} = \frac{b}{a} \cdot \pi \cdot a^2 = \pi \cdot a \cdot b$$