ISBN 9788770668699

Projekt 6.4 Diskret logistisk vækst - prototype for kaosteori

Meteorologernes matematiske modeller for vejrsystemernes udvikling er meget komplicerede. Men selv om de anvender i tusindvis af ligninger og meget stor computerkraft, er de alligevel ikke i stand til at forudsige mere end omtrent en uge frem. Korttidsprognoserne er blevet betydeligt bedre, men prognoser ud over 1 uge er stadig så usikre, at det kunne virke som om der er en grænse for, hvad vi kan forudsige.
Allerede i 1960'erne havde meteorologen Edward Lorenz studeret en yderst forenklet model for vejrets udvikling, og havde opdaget, hvordan selv de mest ubetydelige ændringer i startværdierne kunne medføre dramatiske forskelle i scenarierne for vejrets udvikling på længere sigt.

To af pionererne indenfor studiet af den diskrete logistiske vækst: Meteorologen Edward Lorenz og Biologen Robert May

I 1972 holdt Lorenz et foredrag med titlen: *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?* Artiklen skabte øjeblikkeligt begrebet *sommerfugleeffekten*.

Øvelse 1
Hent Lorenz artikel på ***bogens website***. Læs den og forklar mere præcist, hvad det er han mener med sommerfugleeffekten.

Det centrale budskab fra Lorenz var ikke, at man ikke kan forudsige noget. Det kan man rent teoretisk, men selv forholdsvis enkle matematiske systemer er så følsomme overfor begyndelsesværdierne, at man i praksis ikke kan regne ret langt frem. To vejrprognoser, hvor begyndelsesværdierne adskiller sig med så lidt som effekten af et sommerfugleslag, kan efter nogen tid adskille sig med en hel tornado: "… *two particular weather situations differing by as little as the immediate influence of a single butterfly will generally after sufficient time evolve into two situations differing by as much as the presence of a tornado.* "

Øvelse 2
Via ***bogens website*** kan du hente en applet, der illustrerer, hvad der menes med følsomhed over for begyndelsesbetingelser.

Begrebet *Butterfly Effect* har fascineret mange kunstnere og inspireret flere film. Filmen med samme navn starter med at vise teksten: *Når en sommerfugl blafrer med vingerne på den ene side af jorden, sættes en kædereaktion i gang, der ender med en storm på den anden side af jorden.*

Det system, Lorenz undersøgte, var nok simpelt i forhold til meteorologernes store systemer, men var dog stadig ret kompliceret. Men den egenskab, Lorentz havde opdaget, skulle vise sig at være en generel egenskab ved mange såkaldte *ikke-lineære systemer.* Ikke-lineære systemer er sådanne, hvor de variable opløftes i potenser, ganges og divideres, eller hvor vi anvender funktioner som eksponential- og logaritmefunktioner eller trigonometriske funktioner. *Lineære systemer* er sådanne, hvor de variable ganges med konstanter, og hvor vi i øvrigt kun udnytter regningsarterne + og -.

ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse EGMONT

Denne opdagelse kom fra en helt anden del af matematikken. Robert May, der var professor i Zoologi ved Princeton Universitetet, var først i 70'erne optaget af *diskrete systemer* for populationer, dvs. populationer med en tydelig adskillelse mellem generationerne. Det kunne fx dreje sig om insekter der sætter afkom i verden og selv dør det ene år, hvorefter afkommet bliver voksent og gentager cyklussen det næste år. Populationen til at begynde med kaldes y_0, efter ét år y_1, efter 2 år y_2 osv. Generelt er populationen efter n tidsenheder er da vokset til størrelsen y_n. Når vi vil undersøge en population efter et vist antal perioder, så regner vi os frem skridt for skridt:

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n) \qquad \text{eller} \qquad y_{n+1} - y_n = f(y_n)$$

f angiver tilvæksten pr. tidsenhed. Sådanne ligninger kaldes for *differensligninger*. Som sædvanligt i populationsdynamikken antages tilvæksten kun at afhænge af størrelsen af den forudgående population.
At *løse en differensligning* betyder at finde et udtryk for y_n, så vi ikke behøver at regne forfra. Men det er ofte et vanskeligt problem at løse en differensligning.

Og nu dukker *den logistiske vækstmodel* op igen fra en uventet kant. Den logistiske ligning er den simpleste ikke lineære model, man kunne få nogle erfaringer med. Den logistiske model er, som Verhulst beskrev det, en eksponentiel model, hvor der er tilføjet et hæmmende led. For at varme op ser vi derfor først på den *eksponentielle vækst*. Her er *tilvæksten* proportional med størrelsen af populationen, og vi regner os nu frem:

$f(y) = r \cdot y$,	Opskriv formlen for tilvækst, hvor r er vækstraten
$y_{n+1} - y_n = r \cdot y_n$	Indsæt i differensligningen
$y_{n+1} = y_n + r \cdot y_n = (1+r) \cdot y_n = a \cdot y_n$	Sæt y_n uden for en parentes

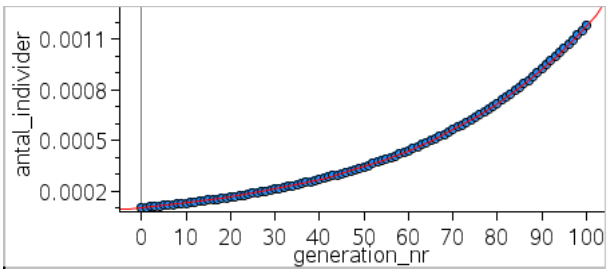
Væksten er altså en simpel gangevækst med fremskrivningsfaktoren $a = 1 + r$.

Øvelse 3 Eksponentiel vækst

a) Benyt dit værktøjsprogram til at bestemme værdierne af y_n skridtvis i et regneark. Anvend fx startværdi $y_0 = 0.0001$, som skrives i startcellen, og anvend fx fremskrivningsfaktoren $a = 1.025$ svarende til en vækst på 2,5% pr. tidsenhed. I cellen for y_1 angives celleformlen $a \cdot y_0$. Herefter kan du fremskrive antallet af individer celle for celle i fx 100 skridt.

	A generation_nr	B antal_individer	C	D
◆	=seq(n,n,0,100)			
1	0	0.0001	a=	1.025
2	1	0.000103		
3	2	0.000105		
4	3	0.000108		

b) Plot antal individer y_n som funktion af antal generationer n.



c) Argumentér for, at løsningen til den eksponentielle differensligning er givet ved:

$$y_n = a^n \cdot y_0$$

idet du anvender, at $y_1 = a \cdot y_0$, $y_2 = a \cdot y_1$ osv.

d) Tegn grafen for den kontinuerte eksponential-model, $y = a^x \cdot y_o$ sammen med dit plot af den diskrete eksponential-model.

I begyndelsen af 1970'erne var man begyndt at være opmærksom på at de ikke-lineære differensligninger, hvor hastighedsfunktionen *f* ikke er lineær, opførte sig helt anderledes end de tilsvarende lineære vækstmodeller. Den simpleste mulighed er den logistiske vækstligning, hvor det antages, at vækstraten r aftager lineært med populationens størrelse, dvs. den konstante vækstrate r erstattes af $r - k \cdot y$.

ISBN 9788770668699

Vi får da den logistiske differensligning på formen:

$y_{n+1} - y_n = (r - k \cdot y_n) \cdot y_n$	Anvend $y_{n+1} = \text{vækstrate} \cdot y_n$
$y_{n+1} = y_n + (r - k \cdot y_n) \cdot y_n$	Læg y_n til på begge sider
$y_{n+1} = (1 + r - k \cdot y_n) \cdot y_n$	Sæt y_n uden for parentes
$y_{n+1} = (a - k \cdot y_n) \cdot y_n$	Udnyt, at $a = 1 + r$

Denne gang er vækstfaktoren kun tilnærmelsesvist konstant og har med god tilnærmelse værdien a for små populationer y_n. Hvis startværdien y_0 er lille og vækstraten for små populationer er moderat, så vil væksten derfor til at begynde med ligne en eksponentiel vækst og derefter bøje af og nærme sig et konstant niveau, *bæreevnen*, præcist som i den kontinuerte model. Men hvis vækstraten for små populationer ikke er moderat begynder populationen at udvikle sig på en højst overraskende måde!

Der er tradition for at skifte enheder for populationen, så k får samme værdi som a, dvs. vækstligningen forenkles til:

$$y_{n+1} = a \cdot (1 - y_n) \cdot y_n$$

Populationen skal da holdes på værdier mellem 0 og 1, da den næste generation ellers bliver negativ. Tilsvarende må vækstfaktoren, a ikke overstige 4, da en population med størrelsen $y_n = \frac{1}{2}$ ellers resulterer i en værdi af y_{n+1} der er over 1. at bliver negativ. Vækstfaktoren ligger altså mellem 1 og 4.

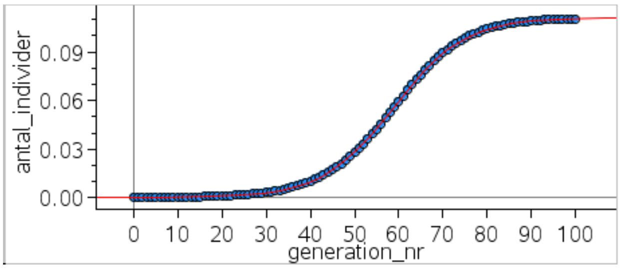
Øvelse 4 Diskret logistisk vækst for små vækstfaktorer

a) Benyt dit værktøjsprogram til at bestemme værdierne af y_n skridtvis i et regneark. Anvend fx startværdi $y_0 = 0.0001$, som skrives i startcellen, og anvend fx fremskrivningsfaktoren $a = 1.125$ svarende til en vækst på 12,5% pr. tidsenhed. I cellen for y_1 angives celleformlen $a \cdot (1 - y_0) \cdot y_0$. Herefter kan du fremskrive antallet af individer celle for celle i fx 100 skridt.

	A generation_nr	B antal_individer	C	D
◆	=seq(n,n,0,100)			
1	0	0.0001	a=	**1.125**
2	1	0.000112		
3	2	0.000127		
4	3	0.000142		

b) Plot antal individer y_n som funktion af antal generationer n.

c) Undersøg, hvor godt dit plot passer med den logistiske funktion ved at udføre en logistisk regression.

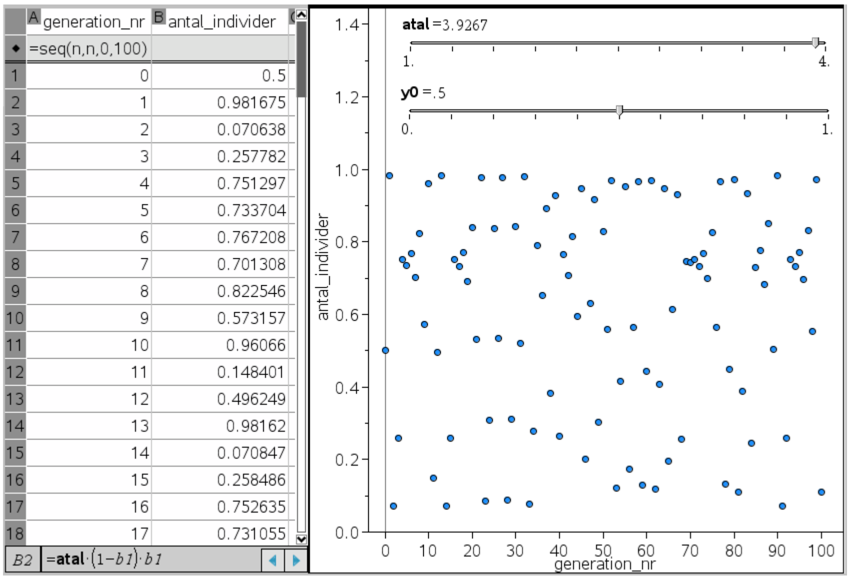


ISBN 9788770668699

Øvelse 5 Diskret logistisk vækst for store vækstfaktorer

a) Indfør en skyder for vækstfaktoren *a*, der kan antage værdier mellem 1 og 4 i passende små skridt fx 0.001, og en tilsvarende skyder for begyndelsesværdien y_0, som antager værdier mellem 0 og 1 i passende små skridt, fx 0.01. Benyt dit værktøjsprogram til at bestemme værdierne af y_n skridtvis i et regneark for de første 100 generationer, idet du tillægger startcellen en passende startværdi bestemt af skyderen på fx $y_0 = 0.5$.

b) Tegn grafen for antal individer y_n som funktion af antal generationer *n*.



	A generation_nr	B antal_individer
◆	=seq(n,n,0,100)	
1	0	0.5
2	1	0.981675
3	2	0.070638
4	3	0.257782
5	4	0.751297
6	5	0.733704
7	6	0.767208
8	7	0.701308
9	8	0.822546
10	9	0.573157
11	10	0.96066
12	11	0.148401
13	12	0.496249
14	13	0.98162
15	14	0.070847
16	15	0.258486
17	16	0.752635
18	17	0.731055

c) Variér vækstfaktoren *a*, og prøv at beskrive opførslen af systemet!
Prøv også at variere begyndelsesværdien: Hvilken indflydelse har begyndelsesværdien på opførslen?

Øvelse 5 Sommerfugleeffekten

a) Anvend nu i stedet startværdi $y_0 = 0.05$, som skrives i startcellen, og anvend en passende stor vækstfaktor fx $a = 3.8$. Plot igen antal individer y_n som funktion af antal generationer *n*.

b) Skift derefter startværdien ud med fx $y_0 = 0.05000000001$. Tegn grafen for den nye vækstmodel i det samme grafrum som den forrige. Konklusion?

På ***bogens website*** kan du finde en animation af den diskrete logistiske vækstmodel, hvor du kan lege videre med den. Animationen kræver brug af TI Nspire.

Sommerfugleeffekten var ikke den eneste overraskelse den diskrete logistisk vækst rummede. Matematikeren Yorke havde i 1975 skrevet en artikel med den fængende titel: *Period three implies chaos*, for at opsummere hans forbløffelse over det diskrete logistiske systems højst overraskende opførsel for store værdier af *a*. Det var her ordet *kaos* blev introduceret i matematikken. Du kan hente Yorkes artikel ***her***.

Så Jorden var allerede godt gødet af et lille hold specialister, da May besluttede sig for i 1976 at skrive en review-artikel til tidsskriftet Nature, der opsummerede betydningen af den diskrete logistiske vækstmodel og forsøgte at fange opmærksomheden hos matematikere og fysikere i almindelighed, hvilket må siges at være sket til fulde: Kaos-teorien eksploderede i slutningen af 1970'erne og har siden været med til at skabe et helt nyt syn på, hvad det vil sige at være en del af en deterministisk, men uforudsigelig verden.

ISBN 9788770668699

Herefter har Verhulst ikke være glemt igen!
Samtidigt slog May også til lyd for, at det var på tide med en ændring i undervisningssystemet: Review-artiklen afsluttedes med, hvad han selv kaldte en evangelisk bønfaldelse:

> *"I would therefore urge that people be introduced to, say, equation* $X_{t+1} = a \cdot X_t \cdot (1 - X_t)$ *early in their mathematical education. This equation can be studied phenomenological by iterating it on a calculator, or even by hand. Its study does not involve as much conceptual sophistication as does elementary calculus. Such study would greatly enrich the student's intuition about nonlinear systems.*
> *Not only in research, but also in the everyday world of politics and economics, we would all be better off if more people realized that simple nonlinear systems do not necessarily possess simple dynamical properties."*

Du kan hente Mays artikel ***her***.

I kapitel 0 har vi forsøgt at tage udfordringen op og undersøgt den diskrete logistiske vækst nærmere med de nye numeriske og grafiske metoder, som computeren banede vejen for i 70'erne.