Projekt 6.3 Økonomiske vækstmodeller - modellering med differentialligninger

I makroøkonomiske modeller, hvor man forsøger at fastlægge den tidslige udvikling af kapitalapparatet K (maskiner og bygninger) og arbejdskraften L (labour), anvender man en produktionsfunktion, der angiver det økonomiske udbytte Y af produktionen som funktion af K og l. Udgangspunktet er typisk en såkaldt Cobb-Douglas funktion af typen

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}\text{, hvor }\ \alpha + \beta = 1$$

Proportionalitetskonstanten A afhænger bl.a. af den teknologiske udvikling.
I kapitel 14 om matematik og samfundsfag går vi dybere ind i dette, Her vil vi se på nogle grundlæggende træk ved sådanne Cobb-Douglas funktioner.
I det følgende vil vi anvende produktionsfunktionen

$$Y = K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}}$$

Vi analyserer modellen:
Hvis både kapitalapparatet K og arbejdskraften L fordobles, så fordobles også det økonomiske udbytte, fordi der gælder, at

$$Y = (2\cdot K)^{\frac{1}{3}} \cdot (2\cdot L)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}}$$

Men hvis kun én af de to faktorer K og L fordobles så vokser det økonomiske udbytte langsommere, fordi vi så får

Fordobling af K: $Y = (2\cdot K)^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}}$, hvor $2^{\frac{1}{3}} = 1{,}26 < 2$

Fordobling af L: $Y = K^{\frac{1}{3}} \cdot (2\cdot L)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}}$, hvor $2^{\frac{1}{3}} = 1{,}59 < 2$

Vi skal nu opstille en differentialligning, der beskriver hvordan kapitalapparatet og arbejdskraften udvikles med tiden. Det nemmeste er arbejdskraften. Her antages ofte en simpel vækstmodel, hvor arbejdskraften, ligesom den øvrige befolkning, vokser eksponentielt, fx

$$\frac{dL}{dt} = 0{,}01 \cdot L$$

Den kunne vi selvfølgelig bare løse, men vi lader den hvile lidt, og ser i stedet på kapitalapparatet. Her antager vi at en bestemt brøkdel af det økonomiske udbytte Y geninvesteres i kapitalapparatet, og derfor gælder der, at

$$\frac{dK}{dt} = s \cdot Y = s \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}}$$

og så har vi jo netop et system af koblede differentialligninger!
I det følgende sætter vi $s = 0{,}1$, og vi skal derfor løse differentialligningssystemet:

$$\frac{dL}{dt} = 0{,}01 \cdot L \qquad \text{og} \qquad \frac{dK}{dt} = 0{,}1 \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}}$$

Øvelse:
Undersøg løsningen grafisk og beskriv, hvad der sker med arbejdskraften henholdsvis kapitalapparatet i det lange løb! Som startværdi kan du fx bruge (2,1).

Nu er fortsat eksponentiel vækst af arbejdskraften selvfølgelig ikke særlig realistisk. Vi kan derfor i stedet prøve at skifte til en logistisk vækstmodel for arbejdskraften. Vi vil antage at bæreevnen er 5, dvs. differentialligningssystemet erstattes nu af

$$\frac{dL}{dt} = 0{,}01 \cdot L \cdot (5 - L) \qquad \text{og} \qquad \frac{dK}{dt} = 0{,}1 \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}}$$

Øvelse:
Undersøg igen løsningen grafisk og beskriv, hvad der sker med arbejdskraften henholdsvis kapitalapparatet i det lange løb.

ISBN 9788770668699

Nu er det heller ikke særligt realistisk at kapitalapparatet bare består i det uendelige uden nogen form for vedligeholdelse. Man vil derfor typisk tilføje et led til differentialligningen for K, der beskriver den naturlige nedslidning af kapitalapparatet. Typisk vil man da antage, at hvis kapitalapparatet overlades til sig selv vil det nedslides eksponentielt, dvs. vi indfører et aftagende eksponentielt led i differentialligningen for K :

$$\frac{dL}{dt} = 0{,}01 \cdot L \cdot (5 - L) \qquad \text{og} \qquad \frac{dK}{dt} = 0{,}1 \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}} - 0{,}2 \cdot K$$

Øvelse:
Undersøg endnu engang løsningen grafisk og beskriv, hvad der sker med arbejdskraften henholdsvis kapitalapparatet i det lange løb.