

Projekt 6.2. Rygtespredning – en introduktion til modellering med differentialligninger

Modeller med flere tilstandsvariable med et indbyrdes afhængighedsforhold kan ofte beskrives ved en række sammenhørende differentialligninger. Et system af fx to eller flere koblede differentialligninger vil således have to eller flere ubekendte, og problemet er her det samme som med almindelige ligninger: Vi kan ikke løse dem en af gangen, fordi der er et indbyrdes afhængighedsforhold. På A-niveau vil vi gå dybere ned i sådanne systemer fx forløbet af en influenzaepidemi, udviklingen i bestanden af rovdyr og byttedyr eller forløbet af store søslag, som slaget ved Trafalgar mellem England og Frankrig under Napoleonskrigene, eller store landslag, som panserslaget ved Kurskbuken mellem Tyskland og Sovjetunionen under 2. verdenskrig.

Vi vil her illustrere nogle af de grundlæggende ideer og metoder i teorien for koblede differentialligninger gennem en historie om udbredelse af rygter.

En fremmed kommer til en by med 10000 indbyggere og sætter et rygte i gang. Hvordan vil rygten spredes? På ethvert tidspunkt under rygtespredningen vil der være tre slags personer tilstede i byen:

Ignoranterne: Dem, som endnu ikke har hørt rygten

Spredere: Dem, som har hørt rygten og fortæller det videre til alle

Uinteresserede: Dem, som er tidligere spredere, men nu har mistet interessen i at sprede rygten

Vi antager, at så snart en spredere videregiver rygten til en, der allerede har hørt rygten, bliver vedkommende uinteresseret i at sprede rygten.

Vi antager også, at møder mellem alle tre persontyper finder sted helt tilfældigt.

Vi betegner nu antallet af ignoranter med i , antallet af spredere med s og antallet af uinteresserede med u . Værdierne for de tre variable i , s og u sker ved et møde mellem en spredere og en anden person:

1. En spredere møder en ignorant og videregiver rygten:

Totalt kan der arrangeres $i \cdot s$ møder mellem en spredere og en ignorant.

Hvis rygten videregives ved et møde, vil der være en ignorant mindre og en spredere mere, dvs. udviklingen i antallet af ignoranter og antallet af spredere kan illustreres sådan:

$$i \rightarrow i - 1 \text{ og } s \rightarrow s + 1$$

2. En spredere møder en spredere og prøver at videregive rygten:

Her skal mødet altså stå mellem to indenfor samme gruppe. Men på hvor mange måder kan 2 ud af en gruppe på s medlemmer mødes? Hver af medlemmerne kan mødes med $s - 1$ andre medlemmer, dvs. der så vil være $s \cdot (s - 1)$ møder, men da de ikke skal mødes med den samme to gange, så vil der kun være halvt

så mange møder. Dvs. der totalt kan arrangeres $\frac{1}{2} \cdot s \cdot (s - 1)$ møder mellem to spredere.

Hvis rygten forsøges videregivet ved et møde, vil der være to spredere mindre og to uinteresserede mere, dvs. udviklingen i antallet af spredere og uinteresserede (en spredere, der allerede har hørt rygten bliver jo uinteresseret) kan illustreres sådan:

$$s \rightarrow s - 2 \text{ og } u \rightarrow u + 2$$

3. En spredere møder en uinteresseret og prøver at videregive rygten:

Totalt kan der arrangeres $u \cdot s$ møder mellem en spredere og en uinteresseret.

Hvis rygten forsøges videregivet ved et møde, vil der være en spredere mindre og en uinteresseret mere, dvs. udviklingen i antallet af spredere og antallet af uinteresserede kan illustreres sådan:

$$s \rightarrow s - 1 \text{ og } u \rightarrow u + 1$$

Rygten kan kun spredes når en spredt møder en ignorant. Det vil derfor være rimeligt at antage, at den hastighed, hvormed rygten spredes, dvs. den hastighed hvormed antallet af ignoranter ændrer sig $i'(t) = \frac{di}{dt}$, vil være proportional med antallet af møder mellem spredte og ignoranter, som jo var $i \cdot s$, dvs.

$$\frac{di}{dt} = -k \cdot i \cdot s$$

hvor $k > 0$ er en konstant, og minuset fremkommer ved at antallet af ignoranter jo må aftage. Ser vi derfor modsat på udviklingen i antallet af spredte, som i denne sammenhæng jo vil vokse, så vil den hastighed hvormed antallet af spredte ændrer sig kunne beskrives ved: $k \cdot i \cdot s$

Tilsvarende kan vi med rimelighed antage, at den hastighed, hvormed antallet af uinteresserede ændrer sig $u'(t) = \frac{du}{dt}$, vil være proportional med antallet af møder mellem spredte og uinteresserede, som jo var $u \cdot s$, dvs.

$$\frac{du}{dt} = k \cdot u \cdot s$$

hvor $k > 0$ er en konstant, idet antallet af uinteresserede jo må vokse, fordi en spredt "omdannes" til en uinteresseret. Ser vi også her modsat på udviklingen i antallet af spredte, som i denne sammenhæng vil aftage, så vil den hastighed hvormed antallet af spredte ændrer sig kunne beskrives ved: $-k \cdot u \cdot s$.

Bemærk, at vi her vælger den samme proportionalitetskonstant for at gøre modellen simpel.

Endelig kan antallet spredt jo også ændre sig ved mødet mellem to spredte, og herved falder antallet af spredte jo med 2, fordi de begge "omdannes" til uinteresserede. Vi antager tilsvarende, at den hastighed, hvormed antallet af spredte ændrer sig i denne sammenhæng, er proportional med antallet af møder mellem spredte. Vi så før at antallet af møder mellem to spredte er $\frac{1}{2} \cdot s \cdot (s-1)$, men da antallet af spredte ved hvert møde jo falder med to, så vil ændringen i antallet af spredte i denne sammenhæng kunne beskrives ved $-k \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot (s-1) = k \cdot s \cdot (s-1)$.

Alt i alt får vi så, at den hastighed, hvormed det totale antal spredte udvikler sig, kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{ds}{dt} = k \cdot i \cdot s - k \cdot s \cdot (s-1) - k \cdot s \cdot u$$

Vi ved fra start, at $i + s + u = 10001$, fordi der ankommer en fremme til byen med 10000 indbyggere.

Derfor er må der gælde, at

$$u = 10001 - i - s$$

og dette kan vi udnytte til at eliminere en af de variable i udtrykket ovenfor

$$\frac{ds}{dt} = k \cdot i \cdot s - k \cdot s \cdot (s-1) - k \cdot s \cdot (10001 - i - s)$$

$$\frac{ds}{dt} = k \cdot i \cdot s - k \cdot s \cdot (s-1) - 10001 \cdot k \cdot s + i \cdot k \cdot s + s \cdot k \cdot s$$

$$\frac{ds}{dt} = 2 \cdot k \cdot i \cdot s - k \cdot s \cdot (s-1) - 10001 \cdot k \cdot s + s \cdot k \cdot s$$

$$\frac{ds}{dt} = 2 \cdot k \cdot i \cdot s - k \cdot s^2 + k \cdot s - 10001 \cdot k \cdot s + k \cdot s^2$$

$$\frac{ds}{dt} = 2 \cdot k \cdot i \cdot s - 10000 \cdot k \cdot s$$

$$\frac{ds}{dt} = k \cdot (2 \cdot i \cdot s - 10000 \cdot s)$$

Således kan rygtespredningen beskrives ved følgende model bestående af to koblede differentialligninger

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -k \cdot i \cdot s \\ \frac{ds}{dt} = k \cdot (2 \cdot i \cdot s - 10000 \cdot s) \end{cases}$$

Fra start er der 10000 ignoranter, svarende til at ingen i byen kender rygtet, før den fremmede ankommer, dvs. den fremmede er den eneste spredere, der er fra start! Dvs. til tidspunktet $t = 0$ er $i_0 = i(0) = 10000$ og $s_0 = s(0) = 1$. Hvis vi antager, at der i løbet af den første dag "omdannes" 10 ignoranter til spredere, så kan vi bestemme proportionalitetskonstanten der ud fra. Den hastighed, hvormed antallet af ignoranter udvikler sig er jo beskrevet

ved $\frac{di}{dt} = -k \cdot i \cdot s$, og da vi antog, at antallet af ignoranter falder med 10 den første dag, kan vi bestemme k ved at

løse ligningen:

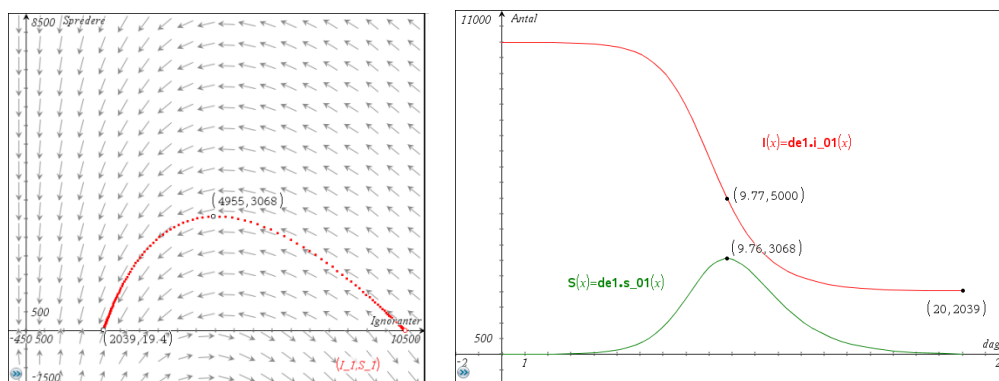
$$-k \cdot i_0 \cdot s_0 = -10$$

$$-k \cdot 10000 \cdot 1 = -10$$

$$k = \frac{10}{10000} = 0,0001$$

Løser vi nu de to koblede differentialligninger numerisk med $k = 0,0001$, så får vi:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -k \cdot i \cdot s \\ \frac{ds}{dt} = k \cdot (2 \cdot i \cdot s - 10000 \cdot s) \end{cases}$$



Løsningskurven til det koblede system, hvor vi plotter antal spredere som funktion af antal ignoranter, viser, hvordan vi fra nederste venstre hjørne bevæger os op mod et toppunkt for antallet af spredere, hvorefter rygtespredningen dør ud omkring de 20000 ignoranter. Når vi plotter løsningskurven svarende til antal spredere som funktion af tiden, så ser vi at antallet af spredere topper efter ca. 10 dage, hvor der er ca. 3000 spredere i følge modellen. Ser vi på antal ignoranter som funktion af tiden, så viser det sig, at ca. 2000 personer aldrig hører rygtet, fordi grafen har et asymptotisk forløb ned mod 2000. Bemærk også, at antallet af spredere topper, omtrent samtidigt med at antallet af ignoranter halveres. Dette følger også af modellen, idet vi omskriver de koblede differentialligninger til en differentialligning:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{k \cdot (2 \cdot i \cdot s - 10000 \cdot s)}{-k \cdot i \cdot s}$$

$$\frac{ds}{di} = \frac{2 \cdot i - 10000}{-i}$$

$$\frac{ds}{di} = -2 + 10000 \cdot \frac{1}{i}$$

og sætter $\frac{ds}{di} = 0$, fordi det er maksimum for antal af spredere som funktion af antal ignoranter vi er interesserede i:

$$-2 + 10000 \cdot \frac{1}{i} = 0$$

$$10000 \cdot \frac{1}{i} = 2$$

$$10000 = 2 \cdot i$$

$$\frac{10000}{2} = i$$

$$5000 = i$$

altså finder vi det maksimale antal spredere, når antallet af ignoranter er 5000.

Ændrer man på værdien af k , så ændres faseplottet ikke, men hvis man ser på det tidlige forløb af rygtespredningen, så vil denne ændre sig – det kan man også forklare ud fra de koblede differentialligninger.