ISBN 9788770668699

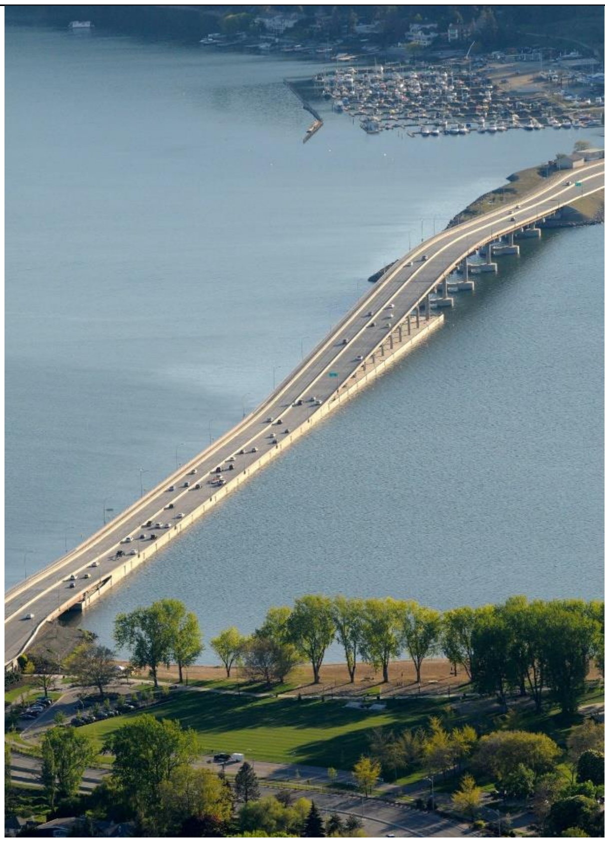
Projekt 5.5 Kubiske splejsninger – Glat sammenstykning med brug af tredje-gradskurver

Når man skal bygge en bro, der skal forbinde to forskellige højder / levels, kan man analysere det som et matematisk problem, hvor graferne for to forskellige funktioner, der repræsenterer hver sit level, skal forbindes med en glat kurve. Hvis der er tale om en bil- eller togbro, så må der ikke være pludselige ændringer i hældningen eller i krumningen. Hvordan man håndterer krumningen gemmer vi til A-niveau. I HEM3 foretages i kapitel 4 om vektorfunktioner en grundig analyse af krumningsproblemer fx ved motorvejsudfletninger. Her vil vi koncentrere os om hældningen på kurverne

Vi forstiller os, at broen ikke skal dreje i den vandrette plan, så vi kan analysere situationen i et lodret tværsnit, hvor der er lagt et koordinatsystem ind.

Situationen er altså, at en vejside kommer ind fra venstre og i koordinatsystemet repræsenteres af en funktion $f_1(x)$. Den venstre vejside ender i punktet $\left(x_1\,, f_1(x_1)\right)$. Derefter er der et vist spænd, hvor den forbindende bro skal designes, frem til det punkt, hvor den højre vejside fortsætter. Denne repræsenteres af en funktion $f_2(x)$. Og punktet, hvor denne "begynder, og hvor broen skal ende betegnes $\left(x_2\,, f_2(x_2)\right)$.

Det kan være en situation som denne berømte bro i Kelowna i Canada, hvor den venstre del er en pontonbro, og hvor der skal være mulighed for skibstrafik af en vis højde. Broen skal altså i første omgang forbinde den vandrette pontonbro med toppen af broen – hvor højden er fastsat af en myndighed. Øvelsen skal gentages efter toppen er nået, hvor broen skal nå ned til en skrånende kunstig ø.



Vi vil nu inddrage data, enten autentiske eller data vi blot konstruerer

Data 1A – Autentiske data fra en virkelig bro 1
Find selv via nettet data på Kelowna broen, vist på billedet, læg et koordinatsystem med den vandrette *x*-akse langs havoverfladen og den lodrette *y*-akse op gennem det højeste punkt. Regn videre med disse

Data 1B – Autentiske data fra en virkelig bro 2
Hent data fra Storebæltsbroen, enten via nettet, eller tag en genvej og hent dem i HEM2, øvelse 5.42 s. 184-85.
Brobanens højeste punkt er 75 meter over havet. Et koordinatsystem lægges, så den vandrette *x*-akse følger havoverfladen, og den lodrette *y*-akse peger op gennem det højeste punkt. Tårnene hedder pyloner. Blokkene, hvor kablerne er fæstnet, hedder ankerblokke. Deres højde over havet er 58 meter. Afstanden fra en ankerblok til en pylon er 536 m Afstanden mellem pylonerne er 1624 m.
Tilkørselsramperne op til ankerblokkene er rette linjer med ligninger: $y=0{,}018x+81{,}9$ og $y=-0{,}018x+81{,}9$.

Data 1C – Konstruerede data

Lad os tænke os, at den venstre vejside slutter i punktet (0,10) med hældningen $\frac{1}{2}$ og at den højre vejside starter i punktet (40,15) med hældningen $-\frac{1}{3}$.

Vi skal altså bygge en del af en bro, der spænder over stykket $\Delta x = x_2 - x_1$ med en gennemsnitlig hældning på

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_2(x_2) - f_1(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Det enkleste ville naturligvis være at bygge en lineær bro, dvs at forbinde de to matematiske punkter med en ret linje.

Øvelse 1

Vis at forskriften for den lineære bro, der forbinder $\left(x_1, f_1(x_1)\right)$ med $\left(x_2, f_2(x_2)\right)$ er:

$$y = \frac{f_2(x_2) - f_1(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f_1(x_1)$$

Øvelse 2.

Bestem forskriften ud fra de data du har valgt at arbejde med

Det er klart, at det sjældent vil være hensigtsmæssigt at benytte en lineær bro, medmindre de to vejsider fx ender lige højt og har vandret hældning. Ellers risikerer vi nogle markante knæk i endepunkterne!

Øvelse 3

Argumentér for, at hvis vi kalder det brostykke, vi skal konstruere, for grafen for en funktion *f*, så skal denne funktion opfylde følgende ligninger:

$$f(x_1) = f_1(x_1) \qquad f(x_2) = f_2(x_2)$$

$$f'(x_1) = f_1'(x_1) \qquad f'(x_2) = f_2'(x_2)$$

Man kunne prøve at eksperimentere med at forbinde endepunkterne med en parabelbue. Men da forskriften for en kvadratisk funktion $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ kun rummer 3 parametre, og vi har 4 ligninger der skal være opfyldt, kan man heller ikke her helt fjerne de ubehagelige knæk i endepunkterne, idet vi kun har en parameter tilovers til at styre hældningerne i de to endepunkter.

Øvelse 4.

Bestem en parabelbue ud fra dine datapunkter, og tegn den ind sammen med lineære funktioner som repræsentanter for $f_1(x)$ og $f_2(x)$

Men hvis vi vælger at forbinde de to endepunkter med en kubisk graf, så kan vi løse opgaven. Hvis tredjegradspolynomiet har forskriften:

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

skal tredjegradspolynomiet altså opfylde de fire ligninger i øvelse 3.

ISBN 9788770668699

Løses disse fire ligninger med hensyn til de fire parametre *A*, *B*, *C* og *D* finder man herved forskriften for et tredjegradspolynomium, hvis graf forbinder de to andre grafer på en glat måde. Man siger, at man har lavet en *kubisk splejsning*.

Øvelse 5: Løs med værktøjsprogram
Anvend dit værktøjsprogram til at bestemme forskriften ud fra de data, du har valgt.
For data 1A (Kelowna broen) er hældningen i begge ender lig 0.
For data 1B (Storebæltsbroen) er hældningen fra venstre 0,018 og fra højre er den 0 (toppen af broen)
For data 1C er hældningerne opgivet til at være $\frac{1}{2}$ fra venstre side og $-\frac{1}{3}$ fra højre side.

1. Definer $f(x):=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$. Opskriv et symbolsk udtryk for $f'(x)$.
2. Opskriv de 4 ligninger med dine data.
3. Løs ligningssystemet med en solvefunktion.

Øvelse 6: Løs i hånden
Hældningskoefficienterne ændres ikke ved at parallelforskyde koordinatsystemet. Det kan være en fordel ift beregningerne at lægge koordinatsystemet, så venstre endepunkt har *x*-værdien 0.
1. Opstil med dine data de 4 ligninger med denne placering af koordinatsystemet, og reducer til 2 ligninger med de ukendte *a* og *b*.

For data 1C har vi: $f(0)=d=10$ $f'(0)=c=\frac{1}{2}$
og dermed:

$$f\left(40\right)=a\cdot 40^3+b\cdot 40^2+\tfrac{1}{2}\cdot 40+10=15$$
$$f'\left(40\right)=3a\cdot 40^2+2b\cdot 40+\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{3}$$

Øvelse 7: Reducer
Reducer de to ligninger ved i førte omgang at skaffe brøkerne af vejen.
For data 1C skal du få:

$$64000a+1600b=-15$$
$$28800a+480b=-5$$

Øvelse 8: Løs ligningerne med lige store koefficienters metode
1. Anvende samme metode i løsningen med de data du har valgt som her med data 1C:
Argumenter for, at vi ved at gange den øverste ligning 3 og den nederste med 10 får *b* samme koefficient:

$$192000a+4800b=-45$$
$$288000a+4800b=-50$$

2. Ved at gange med 3 og med 10 fik vi relativt små tal. Det kan man sidde og pusle med ud fra de tal, der er givet. Men man behøver ikke. Forklar, hvordan vi altid kan få vælge to tal at gange med, så *b* i de to ligninger får samme koefficient. Det samme gælder for *a*.

Når der er samme koefficient foran *b* kan vi let komme videre:

Øvelse 9
Subtraher ligningerne og se, at du nu har én ligning med én ubekendt *a*.

ISBN 9788770668699

For data 1C skal du få: $96000a = -5$

Øvelse 10

1. Bestem værdien af *a*
2. Indsæt denne værdi i en af de oprindelige ligninger og bestem værdien af *b*.

For data 1C skal du få: $a = -\frac{1}{19200}$, $b = -\frac{7}{960}$

Øvelse 11

Man kunne også bestemme *b* ved at anvende lige store koefficienters metode en gang til.
Hvad skulle ligningerne nu ganges med?

Opskriv endelig den kubiske funktion, der splejser de to sider glat sammen

For data 1C skal du få: $f(x) = -\frac{1}{19200} \cdot x^3 - \frac{7}{960} \cdot x^2 + \frac{1}{2} x + 10$

Øvelse 12.

Tegn grafen for *f* i det givne interval sammen med graferne for funktionerne før og efter stykket.

Øvelse 13.

En bro skal føres over en kløft med bredden 50 meter.

I den venstre side munder vejen ud i 20 meters højde med en hældning på 0,05.

I den højre side munder vejen ud i en højde af 25 meter med en hældning på -0,02.
Indfør et passende koordinatsystem og find den kubiske splejsning, der forbinder de to vejsider med hinanden uden at knække i endepunkterne.