ISBN 9788770668699

Differentiation af $\sqrt{x}$.

Sætning 28: Differentiation af $\sqrt{x}$
Funktionen $g(x)=\sqrt{x}$ er differentiabel for alle x i definitionsmængden.

For $x>0$ er differentialkvotienten er: $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

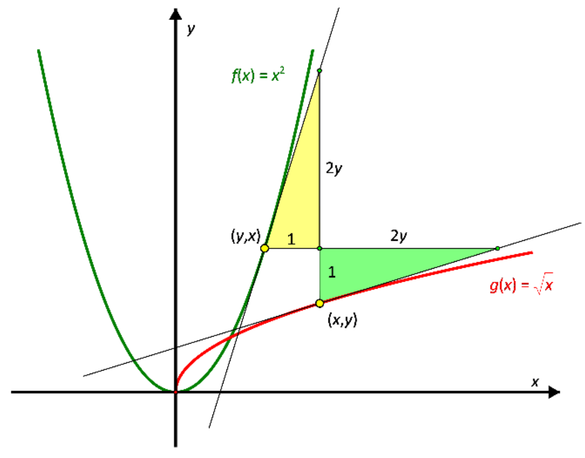
For $x=0$ har grafen lodret tangent.

1. Geometrisk argument

Da grafen for $g(x)=\sqrt{x}$ fremkommer som en spejling af grafen for $f(x)=x^2$ er *g lokalt lineær*, når *f* er det. Derfor er $g(x)=\sqrt{x}$ differentiabel for ethvert $x\geq 0$.

Spejlingen betyder specielt, at hvor grafen for $f(x)=x^2$ har vandret tangent, dér har grafen for $g(x)=\sqrt{x}$ lodret tangent. Altså: Grafen for $g(x)=\sqrt{x}$ har lodret tangent for $x=0$.

Herefter antager vi, at $x\neq 0$



Lad os nu betragte tangenten i et punkt (x,y) på grafen for $g(x)=\sqrt{x}$. Denne er en spejling af tangenten til grafen for $f(x)=x^2$ i punktet (y,x) . Men denne tangent har vi styr på:

Hældningskoefficienten i punktet (y,x) er lig med $2y$

Ved spejlingen føres den gule trekant på tegningen over i en tilsvarende grøn trekant hos tangenten til $g(x)=\sqrt{x}$ i punktet (x,y) . Denne trekant har derfor vandret side på $2y$ og en lodret side på 1. Differentialkvotienten $g'(x)$ er lig med hældningskoefficienten for tangenten, som aflæses i en trekant, der er ensvinklet med den på tegningen, og som har en vandret side på 1. Heraf får vi:

$$g'(x)=\frac{1}{2y}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2y} \qquad \text{Indsæt } g(x)=\sqrt{x}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{Indsæt } y=\sqrt{x}$$

hvilket er påstanden i sætningen.

ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse EGMONT

2. Sammensat differentiation

Læg mærke til, at

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

Dette er en identitet af to funktioner, og funktionsudtrykket på venstre side, $\left(\sqrt{x}\right)^2$ er en sammensat funktion: Den indre funktion er $\sqrt{x}$ og den ydre funktion er $(\cdots)^2$. Når vi differentierer højre og venstre side må der stadig gælde lighedstegn. Venstre side differentieres som en sammensat funktion:

$$\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)' = (x)'$$

$$2 \cdot \sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = 1$$

Vi har nu en ligning med en ubekendt, nemlig differentialkvotienten af $\sqrt{x}$. Denne kan vi isolere:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

hvilket er påstanden i sætningen.

ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse EGMONT

3. Differentiation med brug af tretrinsreglen

Vi udleder differentialkvotienten af $f(x)=\sqrt{x}$ ved hjælp af tretrinsreglens 1. version.

Hjælpeformel. I beviset anvendes kvadratsætningen: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$
Har du glemt den, så repeter hvorfor den gælder ved at gange parenteserne ud.

Generelt	Funktionen $f(x)=\sqrt{x}$
1. Opskriv differenskvotienten: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$
2. Omskriv differenskvotienten:	$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=$ $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{\left(x-x_0\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=$ Forlæng med $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)$ $\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x_0}\right)^2}{\left(x-x_0\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=$ Anvend en kvadratsætning $\dfrac{x-x_0}{\left(x-x_0\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=$ Reducer $\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$ Forkort
3. Lad $x\to x_0$ og se, hvad der sker med det omskrevne udtryk for differenskvotienten.	1. tilfælde: $x_0>0$ Når x nærmer sig x_0, så vil det udtryk vi nåede frem til, $\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$ nærme sig $\dfrac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}$. Dvs.: *Når $x\to x_0$, vil differenskvotienterne gå mod* $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ Læg mærke til, at vi her trækker på en viden om hvordan vi regner med grænseværdier, som vi strengt taget ikke har vist. 2. tilfælde: $x_0=0$ I dette tilfælde er differenskvotientens udtryk omskrevet til $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Når x nærmer sig $x_0=0$, så vil $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ vokse ud over alle grænser og gå mod uendelig.
Konklusion: Hvis der er en grænseværdi, er denne $f'(x_0)$	Konklusion: Funktionen $f(x)=\sqrt{x}$ er differentiabel i x_0. For $x_0>0$ er differentialkvotienten: $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ For $x_0=0$ har grafen lodret tangent.

Udregningen blev gennemført for et vilkårligt x_0, så vi har vist sætningen.