Hvad er matematik? 2
ISBN 9788770668699

website: link fra kapitel 5B - Differentialregning 2 – Om specialfunktioner og krumningsforhold, afsnit 5

L&R Uddannelse EGMONT

Differentiation af $f(x)=\dfrac{1}{x}$ med brug af tretrinsreglen

Hjælpeformler. I beviserne anvendes brøkreglerne:

1) At sætte på fælles brøkstreg: $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b}{a\cdot b}-\dfrac{a}{a\cdot b}=\dfrac{b-a}{a\cdot b}$, fx $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{7}{3\cdot 7}-\dfrac{3}{3\cdot 7}=\dfrac{7-3}{3\cdot 7}\left(=\dfrac{4}{21}\right)$

2) Gange tal på en brøk: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{b}\cdot a$, fx $\dfrac{5}{7}=\dfrac{1}{7}\cdot 5$

Har du glemt dem, så overvej hvorfor de gælder. Slå evt. tilbage i *Hvad er matematik*? 1, kapitel 7.

Vi anvender i beviserne tretrinsreglens 2. version.

Generelt	Funktionen $f(x)=\dfrac{1}{x}$
1. Opskriv differenskvotienten: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}$
2. Omskriv differenskvotienten:	$\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=\dfrac{\frac{x_0}{x\cdot x_0}-\frac{x}{x\cdot x_0}}{x-x_0}$ Fællesnævner er $x\cdot x_0$ $=\dfrac{\frac{x_0-x}{x\cdot x_0}}{x-x_0}$ Sæt på fælles brøkstreg $=\dfrac{\frac{-(x-x_0)}{x\cdot x_0}}{x-x_0}$ Sæt minus uden for parentes $=\dfrac{1}{(x-x_0)}\cdot\dfrac{-(x-x_0)}{x\cdot x_0}$ Gange $\dfrac{-(x-x_0)}{x\cdot x_0}$ på en brøk $=\dfrac{-1}{x\cdot x_0}$ Forkort $(x-x_0)$ væk
3. Lad $x\to x_0$ og se, hvad der sker med det omskrevne udtryk for sekanthældningen.	Når x nærmer sig x_0, så vil det udtryk vi nåede frem til, nemlig $\dfrac{-1}{x\cdot x_0}$, nærme sig $\dfrac{-1}{x_0\cdot x_0}$. Dvs.: *Når $x\to x_0$, vil sekanthældningerne gå mod* $-\dfrac{1}{{x_0}^2}$
Konklusion: Er der en grænseværdi, er denne $f'(x_0)$	Konklusion: Funktionen $f(x)=\dfrac{1}{x}$ er differentiabel og differentialkvotienten er: $f'(x_0)=-\dfrac{1}{{x_0}^2}$

ISBN 9788770668699

Udregningen blev gennemført for et vilkårligt x_0, så vi får følgende konklusion:

Sætning: Differentiation af $\frac{1}{x}$

Funktionen $f(x)=\frac{1}{x}$, hvor $x \neq 0$, er differentiabel for alle x i definitionsmængden.

Differentialkvotienten kan skrives på formen: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, eller på formen $f'(x)=-x^{-2}$

Differentiation af $f(x)=\frac{1}{x}$ med brug af brøkreglen

Brøkreglen siger:

Sætning 9. Differentiation af en brøk (Brøkreglen).
Antag, at funktionerne f og g begge er differentiable, og antag, at $g(x) \neq 0$ i det interval, vi betragter.

Så er også brøken $\frac{f}{g}$ differentiabel med følgende differentialkvotient:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Vi anvender brøkreglen på funktionen $\frac{1}{x}$ ved at sige: $f(x)=1$ og $g(x)=x$

Indsæt i formlen, og reducer

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{(1)'\cdot x-1\cdot(x)'}{(x)^2}=\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$$

Det sidste udtryk kan både skrives som:

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\ , \quad \text{og} \quad \left(\frac{1}{x}\right)'=-x^{-2}$$

hvilket er påstanden i sætningen.