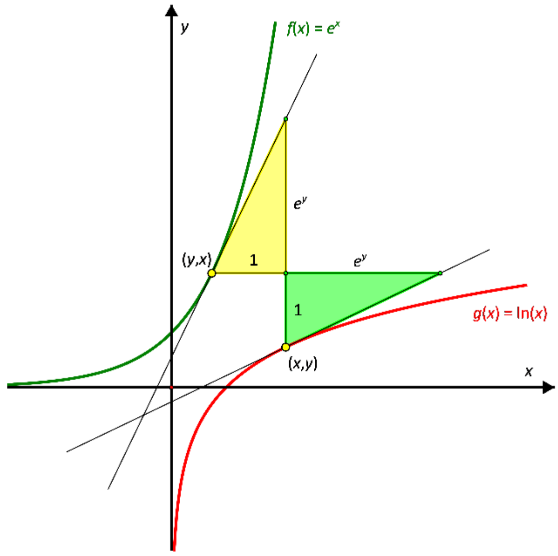
ISBN 9788770668699

Geometrisk argument for differentiation af $\ln(x)$

Da grafen for $\ln(x)$ fremkommer som en spejling af grafen for e^x er funktionen $\ln(x)$ *lokalt lineær*, når funktionen e^x er det. Men den naturlige eksponentialfunktion har vi styr på. Derfor er $\ln(x)$ differentiabel for ethvert $x>0$.

Lad os nu betragte tangenten i et punkt på grafen for $\ln(x)$. Denne er en spejling af tangenten til grafen for e^x i punktet (y,x). Men denne tangent har vi styr på: Hældningskoefficienten i punktet (y,x) er lig med e^y.
Ved spejlingen føres den gule trekant på tegningen over den grønne trekant hos tangenten til $\ln(x)$ i punktet (x,y). Denne trekant har derfor vandret side på e^y og en lodret side på 1.



Differentialkvotienten $\ln'(x)$ er lig med hældningskoefficienten for tangenten, som aflæses i en trekant, der er ensvinklet med den på tegningen, og som har en vandret side på 1. Heraf får vi:

$$\ln'(x)=\frac{1}{e^y}$$

$$\ln'(x)=\frac{1}{e^{\ln(x)}}$$ Indsæt $y=\ln(x)$ ((x,y) ligger på grafen for $\ln(x)$)

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}$$ Udnyt, at funktionerne er hinandens omvendte

Vi har hermed vist

Sætning 20: Differentiation af $\ln(x)$
Funktionen $f(x)=\ln(x)$ er differentiabel for alle x i definitionsmængden (alle $x>0$), med differentialkvotienten: $$\left(\ln(x)\right)'=\frac{1}{x}$$