ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse EGMONT

Differentiation af e^x med brug af tretrinsreglen

Vi har defineret funktionen $f(x) = e^x$ som dén eksponentialfunktion, der har en tangent med hældningskoefficient lig med 1 i punktet $(0,1)$. Det betyder ifølge definitionen på differentiabilitet, at funktionen er differentiabel i $x_0 = 0$ med differentialkvotient $f'(0) = 1$.
Ifølge tretrinsreglen ved vi derfor, at differenskvotienten med udgangspunkt i $x_0 = 0$ har grænseværdien 1:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(0) = 1, \qquad \text{når } x \to x_0$$

Vi indsætter $x_0 = 0$, funktionen e^x, udnytter $e^0 = 1$

$$\frac{e^x - e^0}{x-0} = \frac{e^x - 1}{x} \to 1, \qquad \text{når } x \to x_0$$

Til brug nedenfor omdøber vi *x* til *h*:

$$\frac{e^h - e^0}{h} = \frac{e^h - 1}{h} \to 1, \qquad \text{når } h \to 0 \qquad (*)$$

Vi vil nu ud fra dette vise følgende

Sætning 25, 1: Differentiation af e^x
Funktionen e^x er differentiabel for alle *x* med afledet funktion:

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

Bevis.
Vi bruger tretrinsreglen og udnytter *hjælpeformlerne*:

1) Brøkregel: $k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{b}$,

2) Potensregel: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

1. Opskriv differenskvotienten for funktionen e^x, med udgangspunkt i et vilkårligt tal x_0:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0}$$

$$= \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{x_0+h-x_0} \qquad \text{Definer } h \text{ som tilvæksten: } h = x - x_0 \text{, eller: } x = x_0 + h$$

$$= \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} \qquad \text{Reducer nævneren}$$

ISBN 9788770668699

2. Omskriv differenskvotienten:

$$\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}$$

$$=\frac{e^{x_0}\cdot e^{h}-e^{x_0}}{h} \qquad \text{Udnyt potensregel}$$

$$=\frac{e^{x_0}\cdot e^{h}-e^{x_0}\cdot 1}{h} \qquad \text{Udnyt } e^{x_0}=e^{x_0}\cdot 1$$

$$=\frac{e^{x_0}\left(e^{h}-1\right)}{h} \qquad \text{Sæt den fælles faktor } e^{x_0} \text{ udenfor parentes}$$

$$=e^{x_0}\cdot\frac{e^{h}-1}{h} \qquad \text{Udnyt brøkregel}$$

3. Lad $h\to 0$:

e^{x_0} er en konstant og ændrer sig ikke under grænseovergangen.

Brøken $\frac{e^{h}-1}{h}$ har vi styr på ifølge antagelsen (*) ovenfor.

Regnereglerne for grænseværdier siger nu, at:

$$e^{x_0}\cdot\frac{e^{h}-1}{h}\to e^{x_0}\cdot 1=e^{x_0}, \qquad \text{når } h\to 0$$

Men det betyder, at den oprindelige differenskvotient har denne grænseværdi:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{e^{x}-e^{x_0}}{x-x_0}\to e^{x_0}\cdot 1=e^{x_0}$$

Vi har dermed vist, at differenskvotienten har en grænseværdi, nemlig e^{x_0}.

Konklusion:

Funktionen e^{x} er differentiabel, og differentialkvotienten er lig med grænseværdien vi fandt i punkt 3. Da udregningerne kunne gennemføres for ethvert x_0 har vi derfor:

$$\left(e^{x}\right)'=e^{x}$$