ISBN 9788770668699

Bevis for kædereglen

Sætning 25. Differentiation af den sammensatte funktion $s(x)=f(g(x))$ (kædereglen)
Antag, at *den ydre funktion f* er differentiabel i $y_0=g(x_0)$, med differentialkvotient $f'(y_0)=f'(g(x_0))$, samt at *den indre funktion g* er differentiabel i x_0 med differentialkvotienten $g'(x_0)$.
Funktionen $s(x)=f(g(x))$ er da differentiabel i x_0, med differentialkvotienten:

$$s'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

Hvis *f* og g er overalt differentiable i deres definitionsmængder, så er også s overalt differentiabel, og der gælder:

$$s'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Først gennemfører vi et tillempet bevis for sætning 5 med brug af tretrinsreglen.
Den mest nærliggende ide til et bevis i det generelle tilfælde, ville være at generalisere beviset fra det lineære tilfælde. Det kunne forløbe således med brug af tretrinsreglens 1. version:

1. Opskriv sekanthældningen:

$$\frac{s(x)-s(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}$$

2. Omskriv sekanthældningen:

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{(x-x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}= \qquad \text{Forlæng med } g(x)-g(x_0)$$

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)}= \qquad \text{Roker rundt}$$

$$\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)} \qquad \text{Kald } g(x) \text{ for } y \text{ og } g(x_0) \text{ for } y_0$$

3. Lad $x \to x_0$ og se, hvad der sker.
Vi ser på de to brøker en af gangen.
Først den sidste brøk:
$g(x)$ er differentiabel i x_0 så derfor har vi:

Når $x \to x_0$, vil $\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\to g'(x_0)$

Så den første brøk:
$g(x)$ er differentiabel i x_0 så derfor er $g(x)$ også *kontinuert i* x_0. Men det betyder:

Når $x \to x_0$, vil $g(x) \to g(x_0)$, dvs. $y\to y_0$

$f(y)$ er differentiabel i $y_0=g(x_0)$, så derfor har vi:

Når $y\to y_0$, vil $\dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}\to f'(y_0)$

Samlet får vi nu:

Når $x \to x_0$, vil $\dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}\cdot\dfrac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)}\to f'(y_0)\cdot g'(x_0)$

Indsættes $y_0=g(x_0)$ får vi konklusionen:

s er differentiabel med differentialkvotienten: $s'(x_0)=f'(y_0)\cdot g'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$

© 2018 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 9788770668699

Dette bevis er korrekt i langt de fleste tilfælde. Men ikke generelt. Problemet findes i den omskrivning, hvor vi forlænger, dvs. ganger og *dividerer* med udtrykket $g(x)-g(x_0)$. Hvorfra ved vi nemlig, at dette udtryk er forskellig fra 0, og er det i hele grænseovergangen, hvor $x \to x_0$? Det ved vi faktisk ikke.
Udtrykket $g(x)-g(x_0)$ er jo en funktion af x, og de funktioner vi møder, vil normalt have et endeligt antal nulpunkter. Hvis vi antager det, så vil et af de eventuelle nulpunkter ligger tættest ved x_0, og vi kan derfor lægge et lille interval endnu tættere omkring x_0, hvori udtrykket $g(x)-g(x_0)$ aldrig bliver 0 (bortset fra i selve x_0, men i grænseovergangene indsætter vi jo aldrig selve det tal, vi nærmer os uendelig tæt).
Fastlægger vi nu fra starten, at vi kun regner indenfor dette lille interval, så holder beviset.

Der findes imidlertid situationer, der ikke er dækket af dette bevis. Derfor giver vi nedenfor et generelt bevis, der holder i alle tilfælde. Beviset er især interessant, fordi det kan generaliseres til funktioner af flere variable. Det er således et eksempel på hvordan emnet behandles i videregående matematik. Her – og i de fleste andre lande – kalder man reglen for *kædereglen* (*chain rule*).

Det generelle bevis for sætningen om differentiation af sammensat funktion (kædereglen)

Vi gennemfører nu et bevis for sætning 5 med brug af epsilonfunktioner.
$g(x)$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotienten $g'(x_0)$, så i et interval omkring x_0 kan vi skrive:

$$g(x_0+h)=g(x_0)+g'(x_0)\cdot h+E_g(h)\cdot h \qquad (*)$$

$f(y)$ er differentiabel i $y_0=g(x_0)$, med differentialkvotient $f'(y_0)=f'(g(x_0))$, så i et interval omkring y_0 kan vi skrive:

$$f(y_0+k)=f(y_0)+f'(y_0)\cdot k+E_f(k)\cdot k$$

$$f(g(x_0)+k)=f(g(x_0))+f'(g(x_0))\cdot k+E_f(k)\cdot k \qquad \text{Indsæt } y_0=g(x_0) \qquad (**)$$

Vi betragter nu funktionen $s=f\circ g$ og skal finde et udtryk for $s(x_0+h)$:

$s(x_0+h)=f(g(x_0+h))=$	Anvend definitionen på s
$f\left(g(x_0)+g'(x_0)\cdot h+E_g(h)\cdot h\right)=$	Indsæt (*)
$f\left(g(x_0)+k\right)=$	Kald $g'(x_0)\cdot h+E_g(h)\cdot h$ for k
$f(g(x_0))+f'(g(x_0))\cdot k+E_f(k)\cdot k=$	Anvend (**)
$s(x_0)+f'(g(x_0))\cdot k+E_f(k)\cdot k$	Indsæt $s(x_0)=f(g(x_0))$

Erstatter vi nu igen k med udtrykket $g'(x_0)\cdot h+E_g(h)\cdot h$, så får vi:

$$s(x_0+h)=s(x_0)+f'(g(x_0))\cdot\left(g'(x_0)\cdot h+E_g(h)\cdot h\right)+E_f(k)\cdot\left(g'(x_0)\cdot h+E_g(h)\cdot h\right)$$

Vi ganger ud og samler de tre af leddene i en parentes:

$$s(x_0+h)=s(x_0)+f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)\cdot h+\left(f'(g(x_0))\cdot E_g(h)\cdot h+E_f(k)\cdot g'(x_0)\cdot h+E_f(k)\cdot E_g(h)\cdot h\right)$$

Vi sætter h udenfor parentes og kalder parentesen for $E_s(h)$:

$$s(x_0+h)=s(x_0)+f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)\cdot h+\left(f'(g(x_0))\cdot E_g(h)+E_f(k)\cdot g'(x_0)+E_f(k)\cdot E_g(h)\right)\cdot h$$

$$s(x_0+h)=s(x_0)+f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)\cdot h+E_s(h)\cdot h$$

Vi mangler nu kun at vise, at funktionen $E_s(h)$ er en epsilonfunktion:

$$E_s(h)=f'(g(x_0))\cdot E_g(h)+E_f(k)\cdot g'(x_0)+E_f(k)\cdot E_g(h)$$

dvs. vi skal vise, at $E_s(0)=0$, og at $E_s(h)\to 0$ når $h\to 0$.
Vi bemærker først, at det midterste led i $E_s(h)$ indeholder k og ikke h. Men når $h=0$, så er $k=g'(x_0)\cdot h+E_g(h)\cdot h=g'(x_0)\cdot 0+E_g(0)\cdot 0=0$. Desuden vil også $k\to 0$ når $h\to 0$. Derfor ser vi, at alle tre led i $E_s(h)$ opfylder kravene til en epsilonfunktion, og dermed er det samlede udtryk for $E_s(h)$ også en epsilonfunktion.

© 2018 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 9788770668699

Dermed har vi fået skrevet den sammensatte funktion s på formen:

$$s(x_0+h)=s(x_0)+f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)\cdot h+E_h(h)\cdot h$$

Dvs. s er differentiabel og differentialkvotienten er som angivet i sætningen.

© 2018 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT