ISBN 9788770668699

Sætning 24: Differentiation af den sammensatte funktion $g(x)=f(a\cdot x+b)$

Antag, at funktionen *f* er differentiabel i tallet $y_0=a\cdot x_0+b$, med differentialkvotienten $f'(y_0)$.

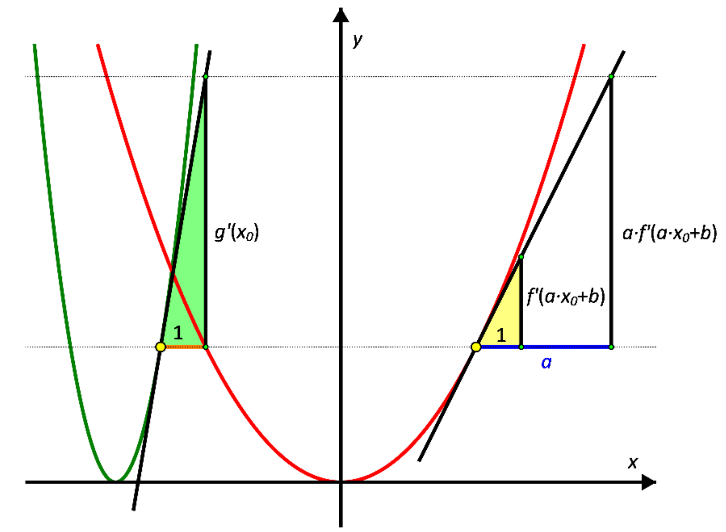
Funktionen $g(x)=f(a\cdot x+b)$ er da differentiabel i x_0, med differentialkvotienten:

$$g'(x_0)=f'(a\cdot x_0+b)\cdot a$$

Hvis *f* er overalt differentiabel, så er også *h* overalt differentiabel, og der gælder:

$$g'(x)=f'(a\cdot x+b)\cdot a$$

Bevis – Geometrisk version.



Generelt

Vi kalder funktionen $f(ax+b)$ for $g(x)$.

Vi ønsker at sammenligne graferne for *f* og *g*.

Hvis vi ønsker at afsætte et punkt $(x_0,g(x_0))$ på grafen for *g*, så skal vi først udregne funktionsværdien $g(x_0)=f(a\cdot x_0+b)$, og dernæst afsætte denne over x_0.

Går vi 1 frem på *x*-aksen til x_0+1, så skal vi her afsætte funktionsværdien:

$$g(x_0+1)=f(a\cdot(x_0+1)+b)=f(a\cdot x_0+b+a)$$

Dvs når vi går 1 frem ved *g*-grafen, går vi *a* frem ved *f*-grafen.

g-grafen er således fremkommet af *f* - grafen ved at vi har skaleret ned med en faktor *a*. Populært sagt, har vi presset x-intervallerne sammen.

Differentialkvotienten $g'(x_0)$ er hældningen på tangenten i $(x_0,g(x_0))$. Men som illustrationen viser, så er trekanten, der måler hældningen $g'(x_0)$, fremkommet ved presse trekanten ved *f*-grafen sammen. Derfor er $g'(x_0)=a\cdot f'(a\cdot x_0+b)$

Hermed er sætningen bevist.

Taleksempel

Lad os betragte funktionen $g(x)=f(3x+15)$.

Hvis vi ønsker at afsætte et punkt som $(-4,g(-4))$ på grafen for *g*, så skal vi først udregne funktionsværdien $g(-4)=f(3\cdot-4+15)=f(3)$, og dernæst afsætte denne over $x=-4$.

Går vi 1 frem på x-aksen til $x=-3$, så skal vi ud regne $g(-3)=f(3\cdot-3+15)=f(6)$, og afsætte denne over $x=-3$

Dvs når vi går 1 frem ved *g*-grafen, svarer det til at vi går 3 frem ved *f*-grafen.

Grafisk fremkommer *g*-grafen således ved at vi skalerer *x*-intervallerne ned med en faktor 3 og dernæst parallelforskyder grafen stykket 5.

Denne skalering og forskydning foregår af alle punkter på grafen for *f*.

Derfor er hældningskoefficienten $g'(-4)$ lig med $3\cdot f'(3\cdot-4+15)$