Differentiation af sammensat funktion i det lineære tilfælde, med brug af tretrinsreglen

Sætning 24: Differentiation af den sammensatte funktion $s(x) = f(a \cdot x + b)$
Antag, at funktionen *f* er differentiabel i tallet $y_0 = a \cdot x_0 + b$, med differentialkvotienten $f'(y_0)$.
Funktionen $s(x) = f(a \cdot x + b)$ er da differentiabel i x_0, med differentialkvotienten:

$$s'(x_0) = f'(a \cdot x_0 + b) \cdot a$$

Hvis *f* er overalt differentiabel, så er også *h* overalt differentiabel, og der gælder:

$$s'(x) = f'(a \cdot x + b) \cdot a$$

Bevis
Vi opskriver forudsætningerne for beviset, nemlig at *f* er differentiabel i y_0 med differentialkvotient $f'(y_0)$:

$$\frac{f(y_0 + h) - f(y_0)}{h} \to f'(y_0) \text{ når } h \to 0 \qquad (*)$$

Vi anvender anden version af tretrinsreglen.

1. Opskriv sekanthældningen:

$$\frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = \frac{f(a \cdot (x_0 + h) + b) - f(a \cdot x_0 + b)}{h}$$

2. Omskriv sekanthældningen:

$$\frac{f(a \cdot (x_0 + h) + b) - f(a \cdot x_0 + b)}{h} =$$

$$\frac{f(a \cdot x_0 + a \cdot h + b) - f(a \cdot x_0 + b)}{h} = \qquad \text{gang } a \text{ ind i parentesen}$$

$$\frac{f(a \cdot x_0 + b + a \cdot h) - f(a \cdot x_0 + b)}{h} = \qquad \text{roker rundt}$$

$$\frac{f(y_0 + a \cdot h) - f(y_0)}{h} = \qquad \text{Kald } a \cdot x_0 + b \text{ for } y_0$$

$$\frac{f(y_0 + a \cdot h) - f(y_0)}{a \cdot h} \cdot a \qquad \text{Forlæng med } a$$

Dette ligner udtrykket, vi skrev op i begyndelsen af beviset. Forskellen er først og fremmest, at tilvæksten her hedder $a \cdot h$. Hvis vi kalder $a \cdot h$ for *k*, og sætter dette ind får vi:

$$\frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{k} \cdot a \qquad (**)$$

3. Lad $h \to 0$ og se, hvad der sker.
Når $h \to 0$ vil også $k = a \cdot h \to 0$.
I følge forudsætningen (*) har vi:

$$\frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{k} \to f'(y_0) \text{ når } k \to 0$$

Men dette vil så også ske, når $h \to 0$.

Ser vi nu på det omskrevne udtryk for sekanthældningen i (**), må der derfor gælde, at:

$$\frac{s(x_0+h)-s(x_0)}{h}=\frac{f(y_0+k)-f(y_0)}{k}\cdot a\to f'(y_0)\cdot a \text{ når } h\to 0$$

Indsætter vi nu $y_0=a\cdot x_0+b$ får vi

$$\frac{s(x_0+h)-s(x_0)}{h}\to f'(a\cdot x_0+b)\cdot a \text{ når } h\to 0$$

og dermed konklusion:

$s(x)$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotienten $s'(x_0)=f'(a\cdot x_0+b)\cdot a$.