ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Weierstrass' ε-δ definition

(I film serien: *10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger* kan du finde filmen Lisbeth Fajstrup: Deformationer og huller i rummet hvor vi får en indføring i netop denne tilgang til grænseværdi og kontinuitet. Lisbeth Fajstrup viser i filmen, hvordan dette generaliseres til højere dimensioner og til funktioner af flere variable.)

Karl Weierstrass (1815-1897) publicerede ikke selv ret meget, men gennem sine berømte forelæsninger præsenterede han en række nye tanker og metoder fra sin forskning. Han overgav generøst sine idéer til sine højt kvalificerede studerende, som færdiggjorde og mangfoldiggjorde disse. Weierstrass blev tidligt så syg, at han ikke kunne stå op og skrive under en forelæsning. Han sad derfor ned og dikterede til en studerende, der på hans bud malede tavlen fuld. Denne anstrengende arbejdsform var givetvis medvirkende til, at Weierstrass´ gennemarbejdede sine forelæsninger ned til den mindste detalje, hvorved de studerendes notater faktisk fik karakter af lærebøger. Netop gennem kopier af studerendes notater og gennem de artikler, hvor Weierstrass' studerende bearbejdede hans resultater fik den matematiske omverden hurtigt kendskab til disse nye "Weierstrasske krav til stringens", og hans metoder satte standarden for præcision.

Det centrale spørgsmål var at få styr på *grænseværdibegrebet*:

$$f(x) \to L \text{ når } x \to a$$

Hvad skal vi forstå ved denne formulering?

Vi begynder med en følge af *x*-værdier, og derefter ser vi på, hvad der sker med $f(x)$'erne. Men vi løber som før omtalt ind i problemer: Hvordan kan vi vide at den følge, vi begyndte med, er *typisk*? Ville vi fx få samme resultat med en hvilken som helst anden følge af *x*'er?

Weierstrass løser problemet ved at vende problemstillingen 180° rundt – hvad er det, vi vil frem til? Vi vil gerne opnå, at forskellen på $f(x)$ og L kan gøres vilkårligt lille (ved at vælge *x* på en bestemt måde). *Weierstrass tager således udgangspunkt i denne konklusion.*

Vi forestiller os "et spil", hvor vi står overfor en modstander, der udfordrer os ved at fastlægge et meget snævert interval om L. Han vælger måske en afstand fra L på $\frac{1}{1000} = 0{,}001$. Dvs. han kræver, at vi med den følge af *x*-værdier, vi vælger, finder en funktionsværdi, der ligger i et *y*-interval svarende til $[L - 0{,}001;\, L + 0{,}001]$. Måske vælger han en afstand, som er endnu mindre! Modstanderen er snedig! Han indfører en vilkårligt lille størrelse ε (det græsk bogstav epsilon) for afstanden til L. Nu er det så vores opgave at fastlægge et *x*-interval omkring a, således at når x ligger i dette interval, så er vi sikre på, at $f(x)$ ligger i det ønskede *y*-interval omkring L. Den nemmeste måde at bestemme et passende interval omkring a er at angive et tal δ (det græsk bogstav delta), der måler afstanden fra x til a. De omtalte intervaller er således:

$$J_\varepsilon =]L - \varepsilon;\, L + \varepsilon[\qquad \text{og} \qquad I_\delta =]a - \delta;\, a + \delta[$$

Weierstrass' definition på grænseværdi lyder så:

Definition. Grænseværdi (1. Version)
$f(x)$ har grænseværdien L, når x går mod a, eller udtrykt i formelsprog:

$$f(x) \to L \text{ når } x \to a$$

hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at der for $x \neq a$ gælder:

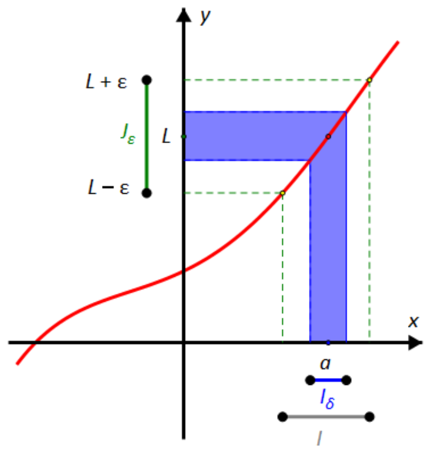
$$x \in I_\delta \Rightarrow f(x) \in J_\varepsilon$$

eller udtrykt med ord: Hvis x ligger i intervallet I_δ, så vil $f(x)$ ligge i intervallet J_ε.

ISBN 9788770668699

Øvelse 1.1
Bemærk, at vi i definitionen kun ser på *x*-værdier, hvor $x \neq a$. Det gør vi, fordi $f(x)$ jo sagtens kan have en grænseværdi uden at være defineret i *a*. Overvej hvordan, og skitser et eksempel på dette.

<table>
<tr>
<td>
Den situation, der beskrives i definitionen, kan illustreres således:
1. Først vælges intervallet J_ε.
2. J_ε fastlægger nu via grafen de ydre grænser for intervallet I.
3. I_δ kan vælges på utallige måder fx som vist på figuren.

Herefter kontrolleres, at: $x \in I_\delta \Rightarrow f(x) \in J_\varepsilon$, dvs. at f fører x op ad den skraverede vej.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Når vi skal til at udnytte definitionen til at regne, er det ofte en fordel at have den skrevet med uligheder i stedet for intervaller, idet vi udnytter, at den numeriske værdi af et tal jo netop angiver hhv. den positive og den negative værdi af tallet. Fx er løsningen til uligheden $|x-2|<1$ alle de tal, hvis afstand til 2 er højst 1, dvs. $-1<x-2<1$, hvilket kan reduceres til, at $1<x<3$, altså skal *x* ligge i intervallet $]1;3[$.

Definition. Grænseværdi (2. Version)
Vi siger, at $f(x) \to L$ når $x \to a$, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at:

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

Øvelse 1.2
Kontroller ved hjælp af illustrationen, at de to definitioner udtrykker det samme.