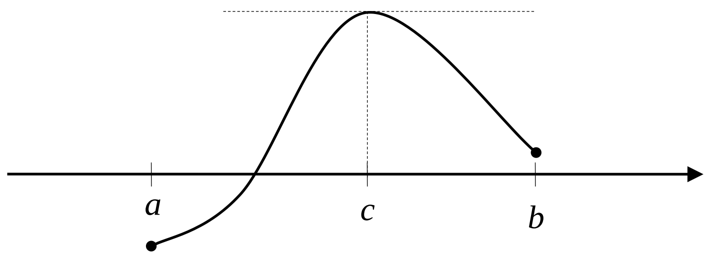
Hvad er matematik? 2
ISBN 9788770668699

website: link fra kapitel 5A. *Differentialregning* 1, afsnit 6.1

Bevis for maks-min-sætningen ved brug af tretrins reglen

Sætning 17. Maks-min-sætningen
Hvis *f* er differentiabel i et interval, og *f* har et lokalt ekstremum i et indre punkt *c*, så er $f'(x) = 0$.

Bevis
Lad os sige, at *c* er et maksimumspunkt (beviset går efter samme melodi for et minimumspunkt). At *f* har lokalt maksimum i *c* betyder altså, at der findes et interval om *c*, således at *f* i dette interval har størsteværdi i *c*, se tegningen.



f er differentiabel i *c*, dvs. vi ved:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \to f'(c) \text{ når } x \to c .$$

Vælg nu en række *x*-værdier til *venstre* for *c*, så $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \to c$.

Se på fortegnet for sekanthældningerne $\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n - c}$:

Da x_n ligger til venstre for *c*, er $x_n - c < 0$.
Da $f(c)$ er størst, er $f(x_n) - f(c) \le 0$.

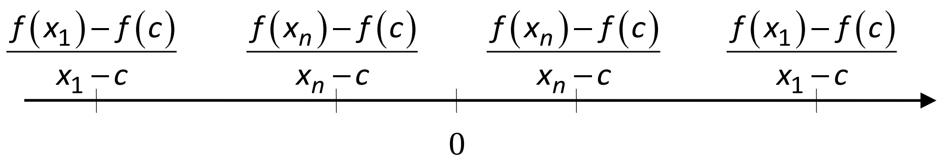
Dvs. for alle disse værdier er $\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n - c} \ge 0$.

Vælg dernæst en række tal til *højre* for *c*, så: $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots \to c$

Se på fortegnet for sekanthældningerne $\frac{f(z_n)-f(c)}{z_n - c}$, og argumenter for, at:

For alle disse værdier er $\frac{f(z_n)-f(c)}{z_n - c} \le 0$.

Betragt du tallinjen, og afsæt herpå alle disse sekanthældninger:



Når $x_n \to c$, og når $z_n \to c$, vil brøkerne nærme sig ét bestemt tal, nemlig $f'(c)$.
Det kommer fra definitionen på differentialkvotient.

Men så kan $f'(c)$ *ikke være negativ*, for så ville brøkerne $\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n - c}$ ikke kunne komme vilkårlig tæt på $f'(c)$. Tilsvarende kan $f'(c)$ ikke være positiv.

Konklusion: $f'(c)$ må være lig med 0.

bevis slut