ISBN 9788770668699

Differentialkvotienten af en brøk (brøkreglen)

Sætning. Differentiation af en brøk.
Antag funktionerne *f* og *g* begge er differentiable i punktet x_0, og antag at $g(x_0) \neq 0$ i et interval om x_0
Så er også brøken $h = \frac{f}{g}$ differentiabel i x_0 med følgende differentialkvotient:

$$h'(x_0) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

Vi giver tre forskellige beviser. I hver af versioner skal du selv gøre en del af arbejdet.

1. version. Omskrivning og brug af produktreglen

Vi tillader os i dette bevis at argumentere intuitivt for at $h = \frac{f}{g}$ er differentiabel, hvis de to funktioner *f*, og *g* er det: Hvis de to grafer ikke har knæk, men er glatte når vi bevæger os igennem punktet henholdsvis $\left(x_0, f(x_0)\right)$ og $\left(x_0, g(x_0)\right)$, så kan der heller ikke opstå et knæk på grafen for *h*. Så vi kan operere med differentialkvotienten $h'(x_0)$. Vi omskriver og udnytter produktreglen:

$h = \frac{f}{g}$	
$h \cdot g = f$	gange $g(x_0)$ over
$\left(h \cdot g\right)'(x_0) = f'(x_0)$	differentier på hver side
$h'(x_0)\cdot g(x_0) + h(x_0)\cdot g'(x_0) = f'(x_0)$	udnyt produktreglen
$h'(x_0)\cdot g(x_0) + \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\cdot g'(x_0) = f'(x_0)$	Indsæt *h*
$h'(x_0)\cdot\left(g(x_0)\right)^2 + f(x_0)\cdot g'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0)$	gange igennem med $g(x_0)$
$h'(x_0)\cdot\left(g(x_0)\right)^2 = f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)$	flyt over i ligningen
$h'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$	divider med $\left(g(x_0)\right)^2$.

hvilket er det ønskede resultat.

2. version. Bevis med brug af tretrinsreglen.
Ifølge forudsætningerne har vi, at *f* er differentiabel i x_0, og *g* er differentiabel i x_0 dvs.:

Når $x \to x_0$ vil $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0)$ og $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to g'(x_0)$

Vi får endvidere brug for, at *g* er kontinuert i x_0, dvs.:

Når $x \to x_0$ vil $g(x) \to g(x_0)$

Ideen i de omskrivninger der følger nedenfor er, at nå frem til de to udtryk ovenfor for sekanthældningerne fro henholdsvis *f* og *g*.

1. Opskriv sekanthældningen for funktionen *h*

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0}$$

ISBN 9788770668699

2. Omskriv sekanthældningen (forklar i hvert trin, hvad der sker):

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}=\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}$$ Anvend definitionen på $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$=\frac{1}{x-x_0}\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)$$ brøkregel

$$=\frac{1}{x-x_0}\cdot\frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\cdot\big(f(x)\cdot g(x_0)-g(x)\cdot f(x_0)\big)$$ fælles brøkstreg

$$=\frac{1}{x-x_0}\cdot\frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\cdot\big(f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)-g(x)\cdot f(x_0)+f(x_0)\cdot g(x_0)\big)$$ træk fra og læg til

$$=\frac{1}{x-x_0}\cdot\frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\cdot\Big(\big(f(x)-f(x_0)\big)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\big(g(x)-g(x_0)\big)\Big)$$ sæt udenfor parentes

$$=\frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\cdot\left(\frac{\big(f(x)-f(x_0)\big)}{x-x_0}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\frac{\big(g(x)-g(x_0)\big)}{x-x_0}\right)$$ Gange $\frac{1}{x-x_0}$ ind i parentes

3. Lad $x\to x_0$:
Så får vi, at ovenstående udtryk vil gå mod følgende:

$$\to\frac{1}{g(x_0)\cdot g(x_0)}\cdot\big(f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)\big)$$

$$=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}$$

hvilket giver den ønskede konklusion

3. version. Bevis med brug af sammensat differentiation og produktreglen.

Vi omskriver først:

$$h(x)=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

Udtrykket $\frac{1}{g(x)}$ kan vi opfatte som en sammensat funktion, hvor den ydre funktion er $l(y)=\frac{1}{y}$, og den indre funktion er g(x).
Derfor får vi:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{1}{\big(g(x)\big)^2}\cdot g'(x)$$

Anvendes nu produktreglen på $h(x)$ får vi:

$$h'(x_0) = f'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g(x_0)}\right) + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$h'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot -\frac{1}{\left(g(x)\right)^2} \cdot g'(x)$$

$$h'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0).g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

$$h'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2} - \frac{f(x_0).g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

$$h'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

hvilket giver den ønskede konklusion.

Øvelse
3. version af beviset udnyttede en viden om differentiation af sammensat funktion, der gennemgås i kapitel 5B, afsnit 4.2, hvor det er sætning 24. Endvidere en viden om den afledede af funktionen $\frac{1}{x}$, (eller: $\frac{1}{y}$).
Dette er behandlet i kapitel 5B, sætning 26 i afsnit 5.1.

Øvelse
Den trigonometriske funktion *tangens,* $\tan(x)$ er defineret ved:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Vis ved brug af brøkreglen de to formler for den afledede af tangens:

$$\left(\tan(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \text{og} \qquad \left(\tan(x)\right)' = 1 + \tan^2(x)$$

Øvelse
Bestem definitionsmængden og tegn graferne til følgende *polynomiumsbrøker*.
Bestem monotoniforhold og evt. lokale ekstrema.

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-6}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{2x-7}$

c) $f(x) = \dfrac{3x-7}{x^2-3x+2}$