ISBN 9788770668699

Geometrisk argument for produktreglen

Produktreglen er både en mere indviklet formel og er mere kompliceret at bevise, end regnereglerne for sum, differens og konstantfaktor. Det er vigtigt at huske, at der ***ikke gælder*** *den regel, man måske ville gætte, nemlig af man differentierer et produkt ved at differentiere hver for sig og gange sammen. Vi kan illustrere geometrisk, hvorfor sagen er lidt mere kompliceret her.*

Lad os betragte to funktioner, $A(t)$, der angiver antal arbejdstimer en bestemt virksomhed råder over pr dag, og $P(t)$, der angiver den gennemsnitlige produktivitet pr arbejder, målt i værdien af det man producerer på en time. Værdien af produktionen på en dag er så $V(t)=P(t)\cdot A(t)$. t angiver tiden. Værdien kan stige både ved at P vokser og ved at A vokser. Lad os antage at efter at der er gået tiden h er der sket en tilvækst i produktivitet på ΔP og en tilvækst i antal arbejdstimer på ΔA. Den samlede værdi kan nu illustreres således:

ΔA	$P\cdot\Delta A$	$\Delta P\cdot\Delta A$
A	$P\cdot A$	$\Delta P\cdot A$
	P	ΔP

Vi ser her, at de to væsentligste bidrag til den samlede tilvækst er $P\cdot\Delta A$ og $A\cdot\Delta P$. Det vil vise sig, at produktet af tilvæksterne $\Delta P\cdot\Delta A$ giver et forsvindende bidrag i en grænseovergang.

Tilvæksten ud fra størrelsen $P\cdot A$ er ifølge figuren:

$$\Delta P\cdot A+P\cdot\Delta A+\Delta P\cdot\Delta A$$

Tilvækst pr tid ud fra størrelsen $P\cdot A$ er derfor:

$$\frac{\Delta P\cdot A}{\Delta t}+\frac{P\cdot\Delta A}{\Delta t}+\frac{\Delta P\cdot\Delta A}{\Delta t}=\frac{\Delta P}{\Delta t}\cdot A+P\cdot\frac{\Delta A}{\Delta t}+\Delta P\cdot\frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Men tilvækst pr tid er netop med tilnærmelse differentialkvotienten.
Formlen fortæller, at mens A og P har et vist niveau, så vil ΔP blive forsvindende lille, når vi ser på små tidsrum. Vi kan derfor se bort fra det sidste led. For små tidsintervaller er tilvækst pr tid af produktet derfor givet ved størrelsen:

$$P'\cdot A+P\cdot A'.$$

Vi har dermed givet et geometrisk argument for, at: $\left(P\cdot A\right)'=P'\cdot A+P\cdot A'$