**ISBN 9788770668699**





# Produktreglen bevist med tretrinsreglen

I beviset får vi brug for, at differentiable funktioner også er kontinuerte. Dette er vist i sætning 7

**Definition. Kontinuitet i et bestemt punkt**
En funktion *f* siges at være kontinuert i $x_0$, hvis der gælder:

$$\text{Når } x \to x_0 \text{ vil } f(x) \to f(x_0)$$

**Sætning. Differentiation af et produkt.**
Antag funktionerne *f* og *g* begge er differentiable i punktet $x_0$. Så er også produktet $h = f \cdot g$ differentiabel i $x_0$ med følgende differentialkvotient:

$$h'(x_0) = (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

**Bevis.**
Ifølge forudsætningerne har vi, at *f* er differentiabel i $x_0$, og *g* er differentiabel i $x_0$ dvs.:

$$\text{Når } x \to x_0 \text{ vil } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) \quad \text{og} \quad \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to g'(x_0)$$

Vi får endvidere brug for, at *g* er kontinuert i $x_0$, dvs.:

$$\text{Når } x \to x_0 \text{ vil } g(x) \to g(x_0)$$

Ideen i de omskrivninger der følger nedenfor er, at nå frem til de to udtryk ovenfor for sekanthældningerne for henholdsvis *f* og *g*.

Vi undersøger *h* ved hjælp af tretrinsreglens første version:

**1. Opskriv sekanthældningen for funktionen *h***

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0}$$

**2. Omskriv sekanthældningen:**

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$ Anvend definitionen på $(f \cdot g)(x)$

$$= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$ Samme led trækkes fra og lægges til

$$= \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0}$$ Sæt udenfor parentes

$$= \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big) \cdot g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0) \cdot \big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0}$$ Anvend brøkregel for sum af brøker

$$= \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{\big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0}$$ Anvend brøkregel for at gange på brøker

Vi har nu fået skilt de to brøker ud, der netop er dem vi har styr på, når vi lader $x \to x_0$.
I det første led ganges $g(x)$ på brøken. Men pga. at *g* er kontinuert har vi også styr på denne, når vi lader $x \to x_0$.

**ISBN 9788770668699**



**3. Lad** $x \to x_0$ **:**
$f(x_0)$ er en konstant og ændrer sig ikke under grænseovergangen.
De to brøker har vi som omtalt styr på ifølge antagelsen.
Og for $g(x)$ ved vi, at når $x \to x_0$ vil $g(x) \to g(x_0)$.
Regneregler for grænseværdier giver os nu:

$$\frac{\left(f(x)-f(x_0)\right)}{x-x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{\left(g(x)-g(x_0)\right)}{x-x_0} \to f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Dvs. $$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$