Hvad er matematik? 2
ISBN 9788770668699

website: link fra kapitel 5A, *Differentialregning 1 – Om polynomier og monotoniforhold*. Afsnit 4.1

Bevis for differentiation af andengradspolynomier

Sætning 11 Differentiation af $f(x)=ax^2+bx+c$

Funktionen $f(x)=ax^2+bx+c$ er differentiabel for alle *x*, og den afledede funktion er: $f'(x)=2ax+b$

Bevis:

Vi skal undersøge funktionsudtrykket $f(x_0+h)$ og omskrive det, så det får en form som i definitionen:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+a\cdot h+E(h)\cdot h \qquad (*)$$

f er her funktionen $f(x)=ax^2+bx+c$. Lad nu x_0 være et tilfældigt valgt fast punkt, og lad *h* være en lille tilvækst. Vi omskriver, idet vi bruger en kvadratsætning – gør selv rede for, hvad der sker i hvert skridt

Omskrivninger		Forklaring
$f(x_0+h)=(x_0+h)^2$	(1)	1
$=a\cdot(x_0+h)^2+b\cdot(x_0+h)+c$	(2)	2
$=a\cdot\left(x_0^2+2\cdot x_0\cdot h+h^2\right)+b\cdot(x_0+h)+c$	(3)	3
$=a\cdot x_0^2+2a\cdot x_0\cdot h+a\cdot h^2+b\cdot x_0+b\cdot h+c$	(4)	4
$=a\cdot x_0^2+b\cdot x_0+c+2a\cdot x_0\cdot h+a\cdot h^2+b\cdot h$	(5)	5
$=\left(a\cdot x_0^2+b\cdot x_0+c\right)+\left(2a\cdot x_0\cdot h+b\cdot h\right)+a\cdot h^2$	(6)	6
$=f(x_0)+\left(2a\cdot x_0+b\right)\cdot h+h\cdot h$	(7)	7

Det næstsidste *h* i udtrykket kan vi kalde for $E(h)$: $E(h)=h$, og dermed får vi udtrykket:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\left(2\cdot a\cdot x_0+b\right)\cdot h+E(h)\cdot h$$

Men sammenlign nu med (*): Her står det ønskede resultat:

$a=2\cdot a\cdot x_0+b$, eller $\quad f'(x_0)=2\cdot a\cdot x_0+b$

Dette gælder for ethvert punkt x_0, så vi kan skrive:

$$f'(x)=2\cdot a\cdot x+b$$