ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Udledning af differentialkvotienten for $f(x)=x^2$ ved hjælp af tretrinsreglen

Tretrinsreglen går ud på følgende:

Praxis: Tretrinsreglen

1. trin: Opskriv differenskvotienten (sekanthældningen) $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ for den givne funktion.

2. trin: Omskriv differenskvotienten til noget overskueligt.
3. trin: Lad $x \to x_0$ og argumenter for, hvad der sker med (det omskrevne udtryk for) differenskvotienten.
Konkluder, hvis der er en grænseværdi i punkt 3: Funktionen er differentiabel, og differentialkvotienten er lig med denne grænseværdi.
Hele processen, der beskrives med symbolet $x \to x_0$ kaldes en *grænseovergang*, og vi læser det således: *x går mod* x_0 .

Trin 1: Opskriv differenskvotienten.
Lad x_0 være et tilfældigt punkt på tallinjen, som vi i det følgende holder fast, og lad *x* være et variabelt punkt. Vi undersøger, om *f* er differentiabel i x_0, dvs om der findes en tangent i punktet P_0 med koordinater $\left(x_0, f(x_0)\right)$. Vi trækker sekanten mellem de to punkter på grafen, P_0 og *P* med koordinaterne $\left(x, f(x)\right)$, og opskriver differenskvotienten. Denne er lig med sekanthældningen, der findes ved hjælp af to-punktsformlen, som vi kender fra den rette linje, $a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$:

$$a_s=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$a_s=\frac{x^2-x_0^{\,2}}{x-x_0} \qquad \text{Indsæt funktionsudtrykket}$$

Trin 2: Omskriv differenskvotienten
Vi skal egentlig ind til x_0, men vi kan ikke bare indsætte dette, da der så står 0 i nævneren. Vi omskriver med anvendelse af den tredje kvadratsætning:

$$a_s=\frac{x^2-x_0^{\,2}}{x-x_0}=\frac{\left(x-x_0\right)\cdot\left(x+x_0\right)}{x-x_0}=x+x_0$$

3. trin: Lad $x \to x_0$
Vi anvender nu en sætning om regneregler for grænseværdier, der bl.a. siger, at grænseværdien af en sum finder vi ved at addere de respektive grænseværdier. I dette tilfælde:

$$x+x_0 \to x_0+x_0=2x_0$$

Konklusion:
Funktionen $f(x)=x^2$ er differentiabel, og differentialkvotienten er lig med grænseværdien vi fandt i trin 3. Da udregningerne kunne gennemføres for ethvert x_0 har vi derfor:

$$\left(x^2\right)'=2\cdot x$$

Vi får naturligvis samme resultat som vi fandt i kapitel 5A, da de to metoder er ækvivalente.