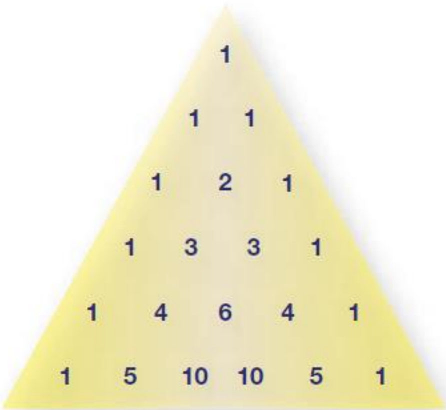
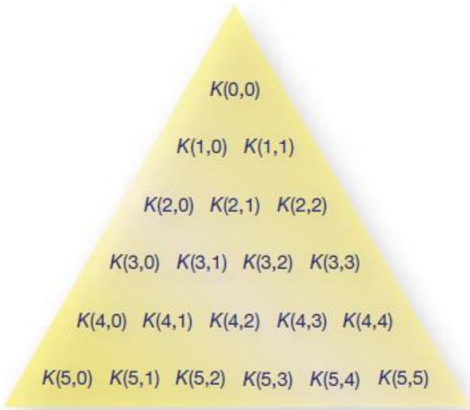
ISBN 9788770668699

Differentiation af x^n med brug af binomialformlen

1. Pascals trekant og binomialformlen

Vi starter med at minde om at potenser af toleddede størrelser, de såkaldte binomer, kan udregnes ved hjælp af Pascals trekant, idet koefficienterne, når man har ganget parenteserne ud, netop stammer fra den tilsvarende række i Pascals trekant:





Pascals trekant er grundigt behandlet i projekt 9.12 i *Hvad er matematik*? bind 1. Den n'te række giver: *binomialformlen*:

$$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \ldots + b^n$$

Indsætter vi heri $a = x_0$ og $b = h$ får vi:

$$(x_0+h)^n = x_0^{\,n} + n\cdot x_0^{\,n-1}\cdot h + \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}\cdot x_0^{\,n-2}\cdot h^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot x_0^{\,n-3}\cdot h^3 + \ldots + h^n$$

2. Differentiation af potensfunktionen x^n, hvor *n* er et naturligt tal.

Når vi skal differentiere potensfunktionen $p(x) = x^n = \underbrace{x\cdot x\cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ gange}}$ gør vi som ved x^3:

$$f(x_0+h) = (x_0+h)^n$$

$$= (x_0+h)^n = x_0^{\,n} + n\cdot x_0^{\,n-1}\cdot h + \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}\cdot x_0^{\,n-2}\cdot h^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot x_0^{\,n-3}\cdot h^3 + \ldots + h^n$$

$$= f(x_0) + \left(n\cdot x_0^{\,n-1}\right)\cdot h + \left(\frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}\cdot x_0^{\,n-2}\cdot h + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot x_0^{\,n-3}\cdot h^2 + \ldots + h^{n-1}\right)\cdot h$$

Parentesen foran *h* i det sidste led kan vi kalde for $E(h)$:

$$E(h) = \frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}\cdot x_0^{\,n-2}\cdot h + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot x_0^{\,n-3}\cdot h^2 + \ldots + h^{n-1}.$$

Vi ser det er en epsilonfunktion. Dermed får vi udtrykket:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \left(n\cdot x_0^{\,n-1}\right)\cdot h + E(h)\cdot h$$

Men sammenlign nu med (*): Her står det ønskede resultat:

$$a = n\cdot x_0^{\,n-1}, \text{ eller } \qquad f'(x_0) = n\cdot x_0^{\,n-1}$$

Dette gælder for ethvert punkt x_0 , så vi kan skrive:

$$\left(x^n\right)' = n \cdot x_0^{\,n-1}$$

Konklusion:
Altså er potensfunktionen $p(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ gange}}$ differentiabel overalt, og der gælder $p'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Vi vender i kapitel 5B tilbage til den generelle potensfunktion, x^a .