ISBN 9788770668699

Regneregler for epsilonfunktioner

Definition: Epsilonfunktioner
En funktion $E(h)$ kaldes en *epsilonfunktion*, hvis den er defineret i et interval omkring 0, og hvis den opfylder følgende to krav:

a) $E(0)=0$
b) $E(h)\to 0$ når $h\to 0$

Ud fra definitionen beviser vi:

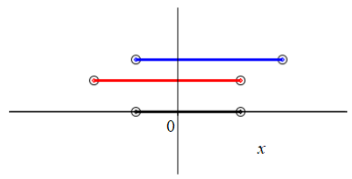
Sætning om regneregler for epsilonfunktioner
Antag at $E_1(h)$ og $E_2(h)$ begge er epsilonfunktioner, og at *k er* et vilkårligt fast tal. Så gælder, at funktionerne:

$$k\cdot E_1(h)\,,\ E_1(h)+E_2(h)\,,\ E_1(h)-E_2(h)\ \text{og}\ E_1(h)\cdot E_2(h)$$

også er epsilonfunktioner.

Bevis:

1) Hvis to epsilonfunktioner er *defineret* i hvert sit interval omkring 0, (se figuren: henholdsvis det røde og det blå interval), så er summen, differensen eller produktet defineret i det som er *fælles* mellem de to intervaller – det sorte interval på figuren - hvilket også er et interval om 0:



2) Hvis $E_1(0)=0$ og $E_2(0)=0$, så er også alle de 4 udtryk:

$$k\cdot E_1(0)\,,\ E_1(0)+E_2(0)\,,\ E_1(0)-E_2(0)\ \text{og}\ E_1(0)\cdot E_2(0)$$

lig med 0.

3) Hvis $E_1(h)\to 0$ når $h\to 0$, og $E_2(h)\to 0$ når $h\to 0$, så vil alle de 4 udtryk også gå mod 0.
Lad os fx se på summen af to epsilonfunktioner, $E_1(h)+E_2(h)$. Kan vi vælge *h* så tæt på 0, at størrelsen af denne sum bliver mindre end et givet meget lille tal ε?
Ja, for vi kan vælge et lille interval om 0, hvor størrelsen af $E_1(h)$ er mindre end $\frac{1}{2}\varepsilon$, og et andet lille interval om 0, hvor størrelsen af $E_2(h)$ er mindre end $\frac{1}{2}\varepsilon$. Men hvis vi så er indenfor *begge* disse intervaller – se figuren ovenfor - så er størrelsen af $E_1(h)+E_2(h)$ mindre end $\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$.
Efter samme melodi kan de andre gennemgås.