

Sætningen om mellemliggende værdier (1. hovedsætning om kontinuerte funktioner)

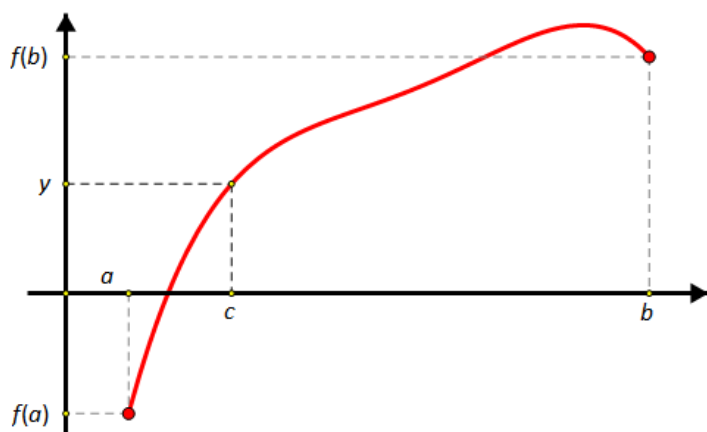
Sætning 1B. Sætningen om mellemliggende værdier

Hvis f er kontinuert i intervallet $[a; b]$, og y er et tilfældigt tal mellem $f(a)$ og $f(b)$, så findes et tal c mellem a og b , så $f(c) = y$.

Bemærkning: Sætningen kalder vi også af og til for 1. hovedsætning om kontinuerte funktioner.

Bevis

Den grafiske situation kunne være som vist på figuren.



Hvis $y = f(a)$ eller $y = f(b)$, er påstanden triviel. Antag derfor, at $f(a)$ og $f(b)$ er forskellige, og at eksempelvis $f(a)$ er mindre end $f(b)$. Da ligger y mellem de to tal, dvs.

$$f(a) < y < f(b)$$

Vi danner en ny funktion: $g(x) = f(x) - y$

Om $g(x)$ gælder:

g er kontinuert

$$g(a) = f(a) - y < 0$$

$$g(b) = f(b) - y > 0$$

Sætning 10 giver nu, at der findes et c mellem a og b , så:

$$g(c) = 0$$

$$f(c) - y = 0$$

$$f(c) = y$$

Men det var jo præcis påstanden i sætning 11.