ISBN 9788770668699

Bevis for skæringssætningen

(*En mere fyldig gennemgang af opbygningen af de reelle tal og kontinuitetssætningerne er sammenfattet i projekt 5.2. Det følgende er også med deri*)

Skæringssætningen siger, at hvis vi tegner grafen for en kontinuert funktion f, der er negativ i punktet $x=a$, dvs. $f(a)<0$, og positiv i punktet $x=b$, dvs. $f(b)>0$, så findes der et sted, hvor grafen krydser 1. aksen. Prøv at tegne nogle situationer: Sætningen forekommer umiddelbart så indlysende, at det måske er svært at se, der er noget at vise?

Sætningen har været kendt og brugt i forskellige versioner i stort set hele matematikhistorien, hvor der er arbejdet med grafer. Fx argumenterer Euler i 1749 for, at ethvert tredjegradspolynomium må have en rod, på følgende måde:

> *"Da den gren af kurven, som ligger under aksen hænger kontinuert sammen med den anden beliggende over aksen, er det absolut nødvendigt, at kurven skærer aksen på et sted."*
>
> (citeret efter Helmuth Gericke, Talbegrebets Historie)

Men hvorfra ved vi, at der findes et tal på den reelle talakse lige netop der, hvor grafen skærer? Det ved vi heller ikke, før vi får styr på de reelle tal. Lad os tage et eksempel:

De første 50 cifre i π er følgende:

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510

De første 10 tal i denne følge kan derfor se således ud:

3, 3,1, 3,14, 3,141, 3,1415, 3,14159, 3,141592, 3,1415926, 3,14159265, 3,141592653

Selv om vi ikke kender alle de uendeligt mange decimaler i π, så findes de! Og derfor må der også findes en sådan følge af rationale tal, der kommer vilkårlig tæt på π. Når vi zoomer ind på det sted på tallinjen, hvor π ligger, og bliver ved med at zoome ind, er det som at kigge ned i en uendelig dyb brønd, hvor der uendeligt langt nede ligger ét tal, nemlig π.

Vi kan jo ikke fortsætte i det uendelige, så har vi ikke et problem med den forklaring. Lige præcis med tallet π kan vi sige, at dette er veldefineret som forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter. Men tænker vi lidt over det, så er der også problemer her – hvordan udregner vi omkredsen af en cirkel? Ja det gør vi normalt med brug af π! Vi kan jo ikke måle den med uendelig nøjagtighed.

De fleste uendelige decimalbrøker er ikke veldefinerede som π. Sætter vi en tynd nål i tallinjen, kan vi godt finde en strategi for at få fat i tallets decimaler: Vi kunne nærme os fra hver side, og f.eks. halvere intervallet i hvert trin. Så må vi komme tættere og tættere på. Igen støder vi ind i det irriterende, at vi ikke kan fortsætte uendelig lang tid. Vi kan aldrig vise tallet og sige: Her er det, og fx svare på, hvad er ciffer nummer gogol (=10^{100}). Når vi således løber panden mod en mur trækker vi i matematik det ultimative våben: Vi indfører et *aksiom*, hvor vi simpelthen påstår, at tallene findes: Vi må starte et sted.

Aksiom for konstruktion af de reelle tal: Intervalruser

Hvis en uendelig følge af intervaller $I_1, I_2, I_3, I_4, \ldots, I_n, \ldots$ opfylder følgende:

1. $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, hvor $\supset$ betyder "indeholdt i"
2. Intervalbredden nærmer sig 0, når $n \to \infty$

så vil denne intervalruse bestemme et reelt tal.

ISBN 9788770668699

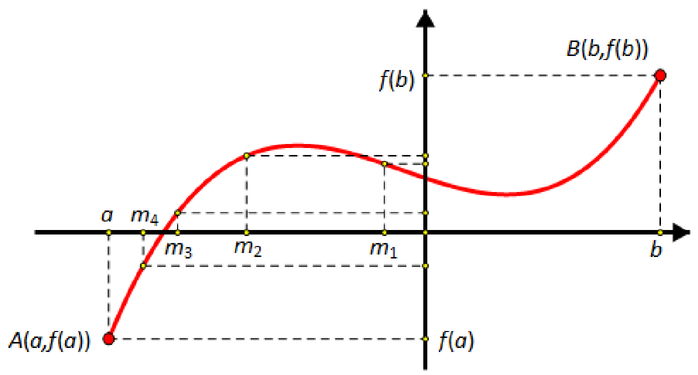
Aksiomet fortæller generelt, at hvis vi som ovenfor zoomer ind et bestemt sted på tallinjen, så ligger der altid ét reelt tal på bunden af den uendeligt dybe brønd. Overvej selv, hvorfor der ikke kan ligge to eller flere.

Vi har nu værktøjet til at vise:

Sætning 1. Skæringssætningen
Hvis en funktion *f* er kontinuert i $[a;b]$, og *f* har modsat fortegn i de to endepunkter, så findes der et tal $c \in]a;b[$, hvor $f(c)=0$.

Bevis
Sætningen er kun korrekt, hvis tallinjen er kontinuert, dvs. uden huller. Havde vi kun de rationale tal, var sætningen ikke korrekt, idet fx $f(x)=x^2-2$ har modsat fortegn i $x=0$ og $x=2$, men grafen passerer igennem 1. aksen uden at skære, da der er hul igennem, hvor det irrationale tal $\sqrt{2}$ ligger.

Lad os sige, at $f(a)<0$ og $f(b)>0$:



Tallet *c* vil vi finde ved en intervalruse: $I_n=[a_n;\, b_n]$, hvor $f(a)<0$ og $f(b)>0$:

1. trin: $I=[a;b]$

2. trin: Lad m_1 være midtpunktet mellem *a* og *b*.
Hvis $f(m_1)=0$, er vi færdige.
Hvis $f(m_1)<0$, sættes $I_2=[m_1;\, b]$.
Hvis $f(m_1)>0$, sættes $I_2=[a;\, m_1]$.

3. trin: Lad m_2 være midtpunktet i det nye interval I_2.

Gentag processen fra 2. trin og konstruér herved et nyt interval I_3.
Herved får vi konstrueret en følge:
$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset I_5 \supset I_6 \supset \ldots \supset I_n$$
Konstruktionen indebar, at vi bestandigt halverede intervallængden.
Derfor vil intervallængden gå mod 0. Men så vil denne intervalruse bestemmer et tal *c*.
Da $a_n \to c$, vil $f(a_n) \to f(c)$, og da $b_n \to c$, vil $f(b_n) \to f(c)$.
Men funktionsværdierne i endepunkterne var jo bestandigt henholdsvis negative og positive:
Derfor må der gælde: $f(c)=0$.

Øvelse
Gør det sidste argument i beviset helt præcist ved først at antage $f(c)<0$, og dernæst $f(c)>0$