ISBN 978-87-7066-8699

Projekt 5.13 Design en optimal flaske– en optimeringsopgave med fri fantasi

Firmaet **PartyKids ©** ønsker at relancere deres energidrik ”Energizer”. Den skal have et nyt navn og lanceres i en ny og smart flaske. Som arbejdstitel kalder de det nye produkt ”Fun-ergizer”, men de tager gerne imod andre forslag.
Firmaet vil også gerne fremstå som et firma, der tager hensyn til ressourcer, og som optræder bæredygtigt, så de smarte nye flasker skal have et minimalt materialeforbrug.

I udgør arbejdsteams der skal komme med et bud på et design til en sådan ny smart flaske. Flasken skal kunne rumme 50 cl., den skal være opbygget af to rumlige figurer (geometriske figurer). og have det mindst mulige materialeforbrug for en flaske af pågældende facon.

Formål
Formålet med projektet er, at I gennem et problemorienteret projektarbejde udvikler en forståelse af matematisk modellering, herunder specielt af styrken i variabelbegrebet og en forståelse af de fire repræsentationsformer for variabelsammenhænge.

Arbejdsplan
Gennem to lektioner arbejder I jer igennem første del, hvor et konkret projekt er gennemgået som eksempel og inspiration. I skal selv taste med, regne med og løse øvelserne, og I skal være sikre på, I har styr på jeres værktøj. I skal give jer selv lektier for, så I når det. Der samles op i 2. lektion på evt. spørgsmål.
Gennem tre lektioner skal I løse opgaven med at designe en ny flaske. Vi afslutter med at I fremlægger resultaterne for klassen.

Produktkrav
En rapport, I har samlet materiale til i løbet af lektionerne og arbejdet hjemme, og som I afleverer gruppevis en uge efter fremlæggelsen. Rapporten indeholder jeres svar på spørgsmålet ovenfor.
Rapporten skal indeholde en indledende præsentation af problemstillingen og en beskrivelse af de metoder, som I har benyttet til at løse problemet med at finde det mindst mulige materialeforbrug.
Dernæst skal rapportens hoveddel være en detaljeret redegørelse for metoder og beregninger, dokumenteret med tabeller og grafer, for jeres løsning på problemet.
Endelig skal rapporten indeholde en konklusion og evt. en kritisk vurdering af det design I valgte, i forhold til at finde optimale løsninger på problemet.

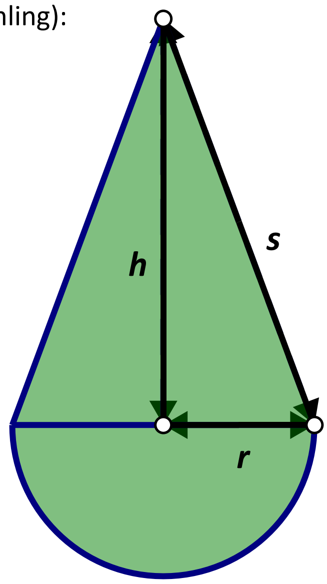
Bilag med formelsamling for rumlige figurer
Som støtte for projektet ligger der i et bilag en omfattende formelsamling over rumfang og overfladeareal. Ved at bladre igennem den vil I sikkert få inspiration til, hvordan jeres flaske (”funergizeren”) kan se ud.

ISBN 978-87-7066-8699

L&R Uddannelse EGMONT

Eksempel på et design af en ny flaske

Vi ønsker at konstruere en smart flaske ud fra en halvkugle og en kegle (en lille tumling):



Rumfanget af halvkuglen er givet ved $V_{halvkugle} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3$.

Rumfanget af keglen er givet ved $V_{kegle} = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$

Da det samlede rumfang skal være $33\text{ cL} = 330\text{ cm}^3$ fås derfor betingelsen $V_{halvkugle} + V_{kegle} = 330$, hvor vi regner i cm. Denne betingelse knytter radius *r* og højden *h* sammen i ligningen:

$$330 = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3 + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$$

Vi ønsker at eliminere den ene af de variable, så vi kan nå frem til at skrive *overfladearealet* som en funktion af én variabel.
Her er der ikke givet på forhånd, hvilken af de variable, vi skal eliminere, men vi vil normalt gå efter det simplest mulige.

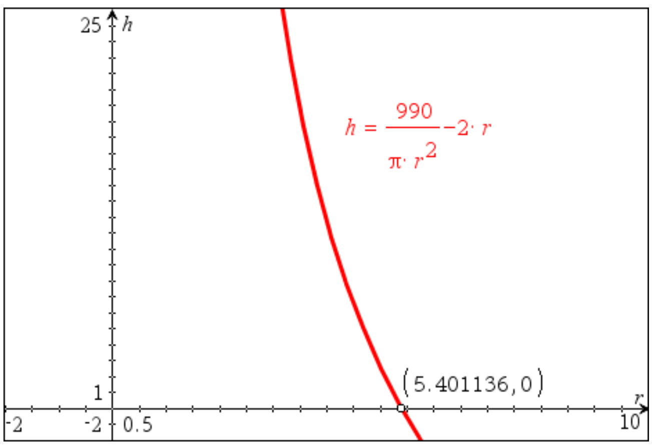
I det samlede rumfang indgår højden *h* lineært (førstegradsled), mens radius indgår både med et andengrads og et tredjegradsled. Vi kan derfor forholdsvis let isolere *h*, mens det kan vise sig umuligt at isolere den anden variable. Så her er valget let: Vi isolerer *h*, dvs vi løser ligningen med hensyn til h.

Øvelse
1. Gør det først selv i hånden. Her får du brug for nogle ligningsløsningsregler! Noter hvilke du har brugt.
2. Udnyt dernæst værktøjets solve-funktion:

$$\text{solve}(330 = \tfrac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3 + \tfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h, h) \quad\to\quad h = \frac{990}{\pi\cdot r^2} - 2\cdot r$$

3. Kontroller, at du har fået det samme i 1) og 2). Her får du sikkert brug for nogle brøkregneregler! Noter hvilke du har brugt.

Udtrykket for *h* er lidt svært at overskue, men da der indgår et led med minus, kunne vi få mistanke om, at udtrykket kunne blive negativ. Og en højde må naturligvis ikke være negativ. Derfor tegner vi som kontrol en graf af højden som funktion af radius (tegn selv med!):



Grafen viser, at højden h kun er positiv for radius r under 5.40… cm, svarende til at *halvkuglen* alene nu er nået op på rumfanget 33 cL. Husk at tjekke denne type problemer. Her laver vi en foreløbig konklusion:

De tilladte *h*-værdier er tallene fra 0 til 5,4 (Vi siger også: *Definitionsmængden,* $\mathrm{Dm} =]0\,;5{,}4[$).

Vi ser nu på materialeforbruget. Vi antager materialet har samme tykkelse alle steder på dåsen, så det samlede *materialeforbrug* er proportionalt med det samlede *areal* af den krumme overflade af halvkuglen og keglen.

Vi henter derfor formlerne for den krumme overflade af de to komponenter:

$$O_{halvkugle} = \tfrac{1}{2}\cdot 4\cdot \pi \cdot r^2 = 2\cdot \pi \cdot r^2$$

$$O_{kegle} = \pi \cdot r \cdot s$$

Her kommer en ny variabel *s* ind på banen. Den ønsker vi elimineret.

Øvelse

1. Vis ud fra figuren (keglen i bilaget) at vi kan udtrykke den skrå side *s* ved hjælp af højden *h*:

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}\ .$$

2. (svær!) Vis formlen $O_{kegle} = \pi \cdot r \cdot s$.

(hjælp: klip keglen op langs siden *s* og bred den ud. Hvad er det for en figur? Overfladearealet af keglen er lig med arealet af denne figur)

Indsættes *s* i $O_{kegle} = \pi \cdot r \cdot s$ får vi:

$$O_{kegle} = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$

Vi finder derfor den samlede krumme overflade til at være

$$O = 2\cdot \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= 2\cdot \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{990}{\pi \cdot r^2} - 2\cdot r\right)^2}\ ,\ \text{(hvor vi har indsat det fundne udtryk for } h\text{)}$$

Nu har vi nået første skridt i matematiseringen af problemet: Vi har oversat det sprogligt formulerede problem til et spørgsmål om at bestemme mindsteværdi af funktion $O(r)$ med ovenstående formeludtryk.

Den *uafhængige variabel r* varierer fra (tæt ved) 0 til 5,4. Men hvor store talværdier er egentlig overfladearealet? Det er vi interesseret i at vide af flere grunde, fx i forbindelse med tegning af en graf: Nogle værktøjer har indbyggede faciliteter, så de automatisk giver et grafvindue, hvor vi kan se grafen, men det er ofte ikke det vindue, vi ønsker. Man kan også komme ud for situationer, hvor der tilsyneladende ikke er nogen graf – den befinder sig blot uden for det vindue vi ser. *Det er kort sagt en fordel selv at kunne indrette grafrummet, og dertil skal vi kende hvorledes de variable varierer*. For at få et indtryk af dette og af, hvordan overfladearealet afhænger af radius kan vi opstille en *tabel*, hvor et udsnit kan se således ud (Opstil selv en tabel!)

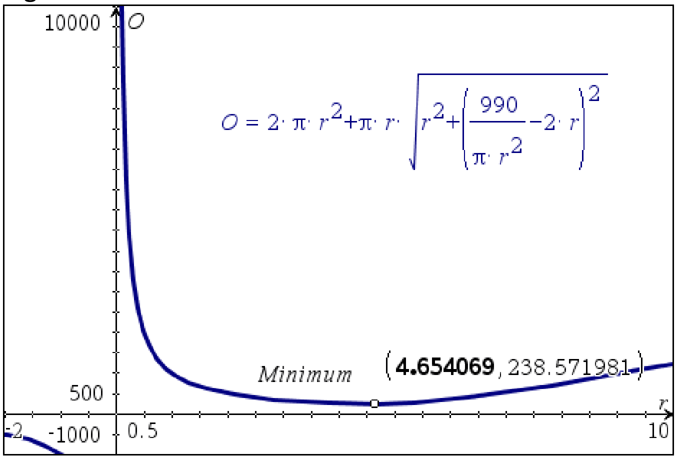
	A radius	B overflade	C	D	E	F	G
=	=seq(0.1*	O(radius)					
42	4.1	251.367571...					
43	4.2	247.458445...					
44	4.3	244.172572...					
45	4.4	241.567452...					
46	4.5	239.718244...					
47	4.6	238.719083...					
48	4.7	238.682652...					
49	4.8	239.736439...					
50	4.9	242.013984...					
51	5.	245.640228...					
52	5.1	250.712444...					

B O(radius)

ISBN 978-87-7066-8699

Tabellen giver indtryk af, at overfladearealet bliver meget stort, når radius bliver meget lille (Vi siger, at overfladearealet går mod uendelig, når radius går mod 0, og skriver det således: $O(r) \to \infty$ når $r \to \infty$) . Endvidere bliver $O(r)$ mindre og mindre (vi siger, at *funktionen* $O(r)$ *aftager*) når r vokser, indtil ca 4,7, hvorefter overfladearealet vokser lidt igen. *Der ser altså ud til at være et minimum omkring r=4,7*.

Vi indretter nu et grafvindue ud fra tabellens oplysninger om hvordan den uafhængige variabel r og den afhængige variabel $O(r)$ varierer. (Der er ikke ét svar på hvilket grafvindue, der er bedst – det afhænger altid af, hvad der spørges om: i dette tilfælde om et minimum, hvorfor vores grafvindue skal have fokus på, at vi kan aflæse et evt. minimum).
Tegner vi grafen for den krumme overflade kan det se således ud:



Vi har samtidig anvendt grafværktøjets facilitet til at bestemme minimum. Vi ser da at grafen har et minimumspunkt for r = 4.654 cm. Dette svarer fint til tabellens oplysninger og tallet ligger under den øvre grænse for de tilladte værdier af radius, dvs. 5.40… cm. Husk at inddrage dette før konklusionen drages. (Bemærk, at grafværktøjets minimumsfacilitet bestemmer minimum i det vindue vi ser. Det kunne være, der var andre svar i andre vinduer – men det er ikke tilfældet her).

Øvelse
1. Den tilhørende højde finder vi ved at indsætte værdien af r i formlen:

$$h=\frac{990}{\pi\cdot r^2}-2\cdot r$$

Vis, at dette giver: h = 5.241 cm.
2. Det minimale overfladeareal kan aflæses af grafen, eller bestemmes ved at indsætte værdien af r i $O(r)$:
Indsæt og vis, at $O(4{,}654)=238{,}57$

Konklusion
Vi udtrykker konklusionen på vores *matematiske analyse* af problemet således:
Funktionen $O(r)$ *har minimum for r=4,564, med værdi* $O(4{,}654)=238{,}57$
Når det er opgaver, som her, der *handler om noget*, så udtrykker vi den endelige konklusion i det sprog, som opgaven er formuleret i. I dette tilfælde svarer vi:
Vores flaske, der skal rumme 33 cL, har det mindste materialeforbrug, når dimensionerne er: radius = 4,564 cm og højde = 5,241 cm.

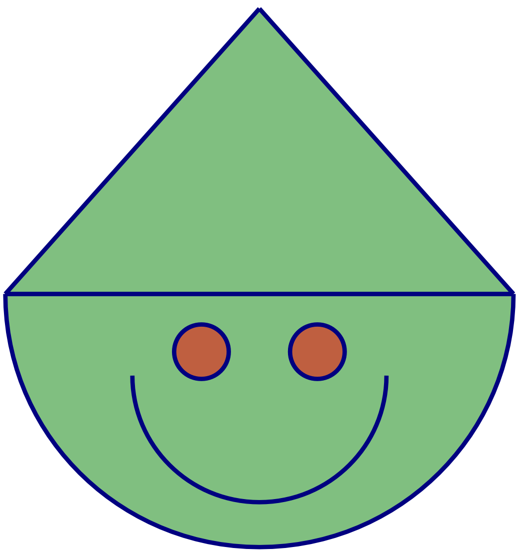
Øvelse
I løbet af gennemgangen anvendte vi en række matematiske begreber. Forklar på skift for hinanden:
- regler for ligningsløsning, som I har anvendt
- brøkregningsregler, som I har anvendt
- de 4 repræsentationsformer for variabelsammenhænge og de enkeltes styrker og svagheder
- hvad er definitionsmængden for en funktion?
- hvad menes der med minimum (og maksimum) for en funktion?
- hvad menes der med at en funktion er aftagende (og voksende)?
- vi anvendte undervejs Pythagoras læresætning – hvad siger denne sætning helt præcis?

Øvelse (kræver kendskab til differentialregning)
Vi omtalte ovenfor, at en grafisk bestemmelse af maksimum eller minimum kan være usikker, da vi ikke nødvendigvis har hele grafen i vinduet. Under emnet *differentialregning* får man værktøjer til rådighed, der med sikkerhed kan afgøre den slags spørgsmål.
Har man kendskab til differentialregning, så kan man bakke den grafiske analyse op med en symbolsk udregning af differentialkvotienten.
1. Gør det, dvs bestem differentialkvotienten af $O(r)$.
Dette giver et så kompliceret udtryk, at det kan være svært at komme videre. For næste trin er at sætte denne differentialkvotient $O'(r)=0$.
2. Gør det. Du skal muligvis hjælpe programmet med at gætte på en løsning – fx x=4 – idet programmet skrift for skridt arbejder sig frem til at bestemme løsningen.
Det hele kan se ud som følger:

$$\frac{d}{dr}\left(2\cdot\pi\cdot r^2+\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+\left(\frac{990}{\pi\cdot r^2}-2\cdot r\right)^2}\right) \blacktriangleright \frac{-\sqrt{5\cdot\left(\pi^2\cdot r^6-792\cdot\pi\cdot r^3+196020\right)}}{r^2}+\frac{3\cdot\pi\cdot\sqrt{5}\cdot r\cdot\left(\pi\cdot r^3-396\right)}{\sqrt{\pi^2\cdot r^6-792\cdot\pi\cdot r^3+196020}}+4\cdot\pi\cdot r$$

$$\text{solve}\left(\frac{-\sqrt{5\cdot\left(\pi^2\cdot r^6-792\cdot\pi\cdot r^3+196020\right)}}{r^2}+\frac{3\cdot\pi\cdot\sqrt{5}\cdot r\cdot\left(\pi\cdot r^3-396\right)}{\sqrt{\pi^2\cdot r^6-792\cdot\pi\cdot r^3+196020}}+4\cdot\pi\cdot r=0,r=4\right) \blacktriangleright r=4.65407$$

Vi får bekræftet den grafiske løsning!.
Vi kan altså bygge en flaske (en "funergizer") med målene: r = 4.65 cm og h = 5.24 cm. Den ser sådan ud:



God fornøjelse!

ISBN 978-87-7066-8699

Bilag: Formelsamling for rumlige figurer

Betegnelser
V = Volumen = Rumfang
O = Samlet Overflade; K = Krum overflade
G = Areal af grundflade; M = Areal af midtflade; T = Areal af topflade
h = Højde

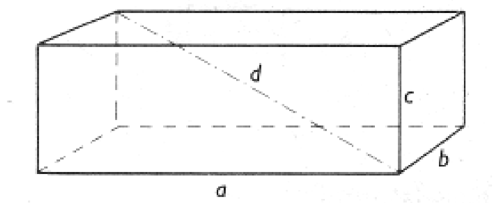
Polyedre

Retvinklet kasse

$V = a \cdot b \cdot c$

$O = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



Prisme

Alment prisme

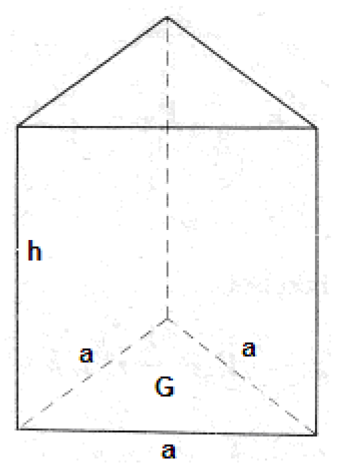
$V = G \cdot h$

$O = (a + b + c + \ldots) \cdot h + 2G$

Ligesidet trekantet prisme (se figur)

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot h$$

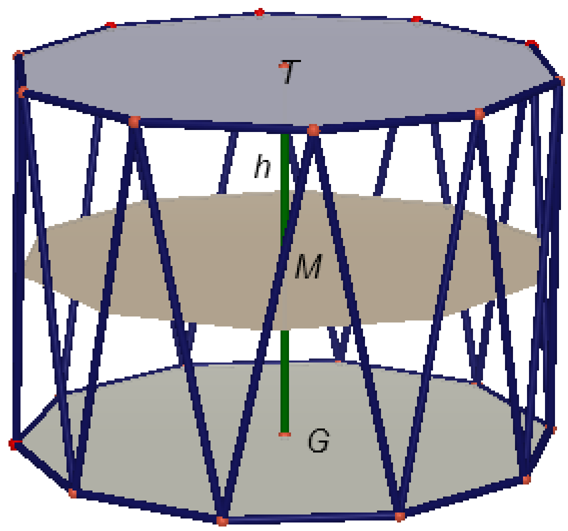
$$O = 3 \cdot a \cdot h + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$$



Prismatoid

Parallel bundflade og topflade. Sidefladerne er enten trekanter eller trapezer. Fx er et antiprisme ('tromme') et eksempel på en prismatoid (se figur).

$$V = \frac{1}{6} \cdot (G + 4M + T) \cdot h$$



Pyramide

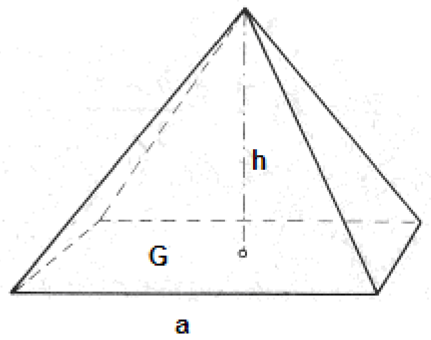
Almen pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Kvadratisk pyramide (se figur)

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$O = a^2 + 2a \cdot \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

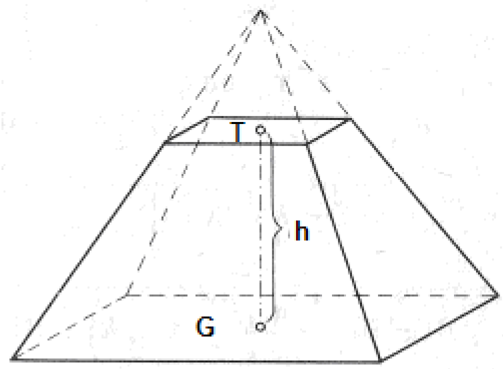


Pyramidestub

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(G + \sqrt{G \cdot T} + T\right)$$

Tilfældet med en kvadratisk pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right)$$



De regulære polyedre

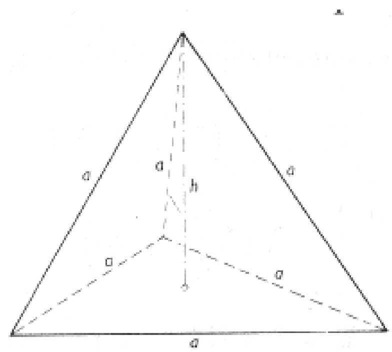
Regulært Tetraeder

$$V = \frac{1}{12} \cdot a^3 \cdot \sqrt{2}$$

$$O = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

$R = \frac{1}{4} \cdot a \cdot \sqrt{6}$ (radius i omskreven kugle)

$r = \frac{1}{12} \cdot a \cdot \sqrt{6}$ (radius i indskreven kugle)



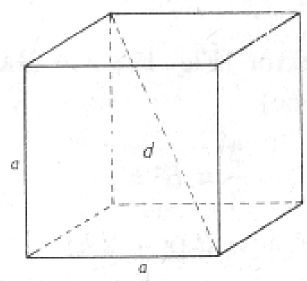
Terning

$$V = a^3$$

$$O = 6a^2$$

$R = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}$ (radius i omskreven kugle)

$r = \frac{1}{2} \cdot a$ (radius i indskreven kugle)



ISBN 978-87-7066-8699

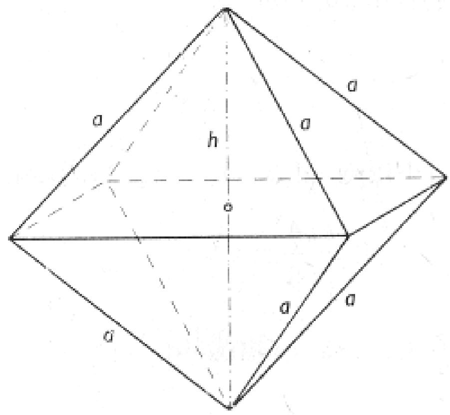
Regulært Oktaeder

$$V=\frac{1}{3}\cdot a^3\cdot\sqrt{2}$$

$$O=2a^2\cdot\sqrt{3}$$

$$R=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{2}\quad\text{(omskreven kugle)}$$

$$r=\frac{1}{6}\cdot a\cdot\sqrt{6}\quad\text{(indskreven kugle)}$$



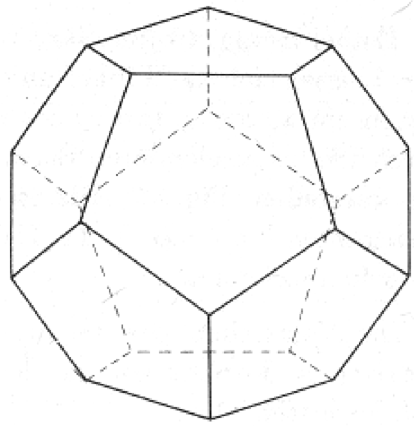
Regulært Dodekaeder (sidelængden er a)

$$V=\frac{1}{4}\cdot a^3\cdot\left(15+7\sqrt{5}\right)$$

$$O=3a^2\cdot\sqrt{5\cdot\left(5+2\sqrt{5}\right)}$$

$$R=\frac{1}{4}\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{3}\qquad\text{(omskreven kugle)}$$

$$r=\frac{1}{4}\cdot a\cdot\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}}\quad\text{(indskreven kugle)}$$



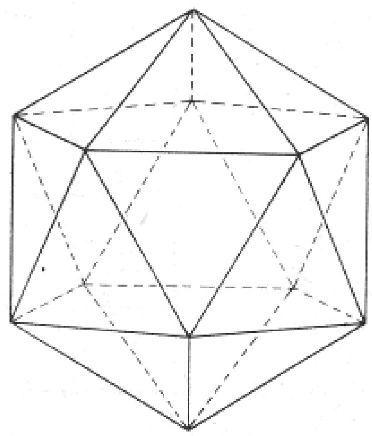
Regulært Ikosaeder (sidelængden er a)

$$V=\frac{5}{12}\cdot a^3\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)$$

$$O=5a^2\cdot\sqrt{3}$$

$$R=\frac{1}{4}\cdot a\cdot\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\quad\text{(omskreven kugle)}$$

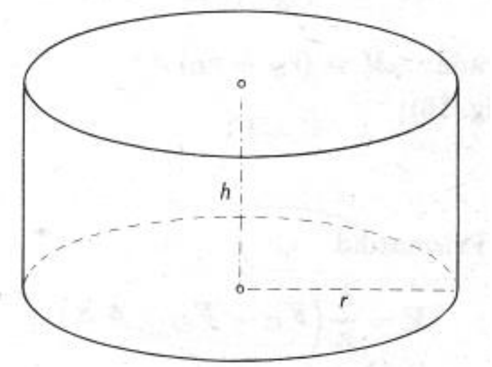
$$r=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}\qquad\text{(indskreven kugle)}$$



Omdrejningslegemer

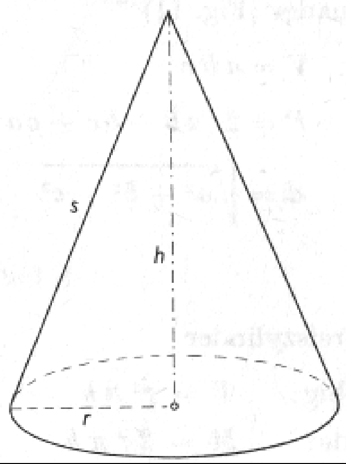
Cylinder

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$K = 2\pi \cdot r \cdot h$
$O = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$



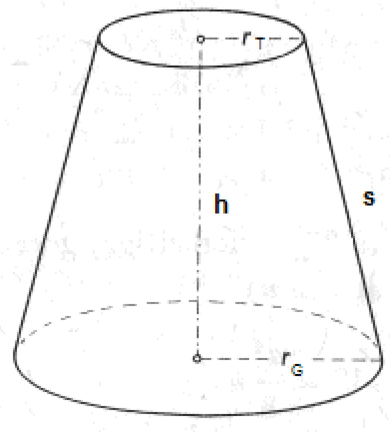
Kegle

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$
$K = \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r^2$
$s = \sqrt{r^2 + h^2}$



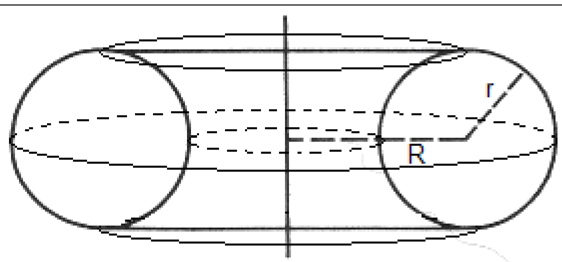
Keglestub

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(r_G{}^2 + r_G \cdot r_T + r_T{}^2\right) \cdot h$
$K = \pi \cdot \left(r_G + r_T\right) \cdot s$
$O = \pi \cdot \left(r_G + r_T\right) \cdot s + \pi \cdot r_G{}^2 + \pi \cdot r_T{}^2$



Torus
('badering')

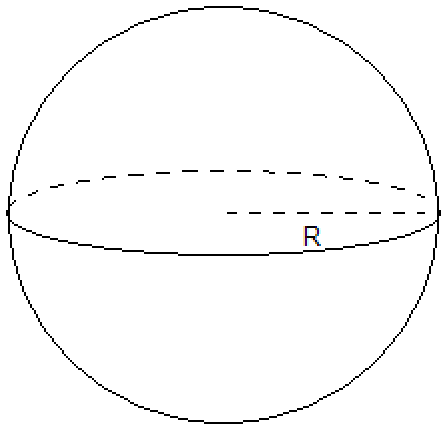
$V = 2\pi^2 \cdot r^2 \cdot R$
$O = 4\pi^2 \cdot r \cdot R$



ISBN 978-87-7066-8699

Kugle

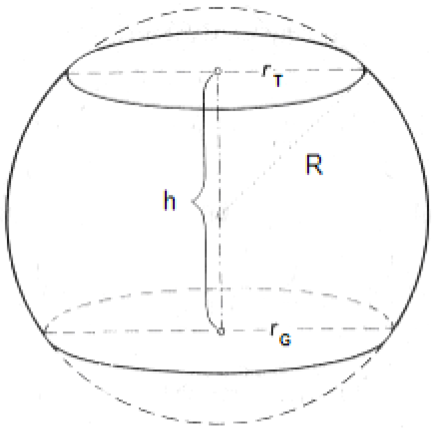
$$V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$$
$$O=4\pi\cdot R^2$$



Kuglezone

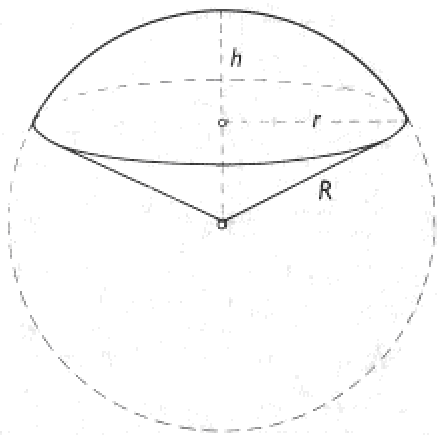
$$V=\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot\left(3{r_G}^2+3{r_T}^2+h^2\right)\cdot h$$
$$K=2\pi\cdot R\cdot h$$

$$O=2\pi\cdot R\cdot h+\pi\cdot {r_G}^2+\pi\cdot {r_T}^2$$



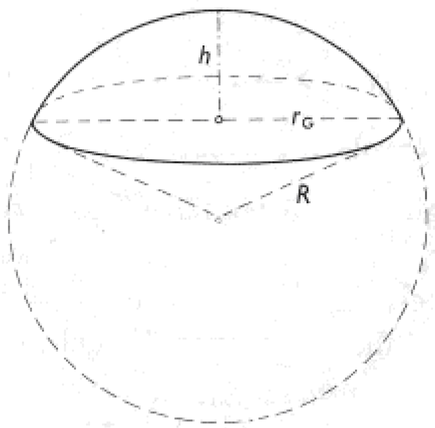
Kugleudsnit

$$V=\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot h$$
$$O=\pi\cdot R\cdot r+2\pi\cdot R\cdot h$$



Kugleafsnit (kuglekalot)

$$V=\pi\cdot h^2\left(R-\frac{1}{3}\cdot h\right)=\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot\left(3{r_G}^2+h^2\right)\cdot h$$
$$K=2\pi\cdot R\cdot h=\pi\cdot\left({r_G}^2+h^2\right)$$
$$O=2\pi\cdot {r_G}^2+\pi\cdot h^2$$



ISBN 978-87-7066-8699

Omdrejningsellipsoide

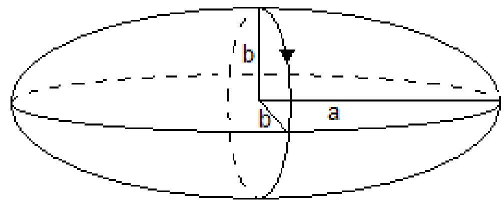
Ellipsen har storakse $2a$ og lilleakse $2b$. ε angiver ekcentriciteten, der er et mål for fladtryktheden.

Ved omdrejning omkring storeaksen $2a$: ('langstrakt'):

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b^2$$

$$O = 2\pi \cdot b^2 + 2\pi \cdot \frac{a \cdot b}{\varepsilon} \cdot \sin^{-1}(\varepsilon)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

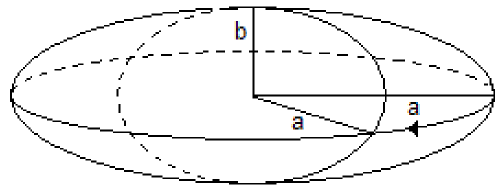


Ved omdrejning omkring lilleaksen $2b$: ('fladtrykt'):

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot b$$

$$O = 2\pi \cdot a^2 + \pi \cdot \frac{b^2}{\varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$

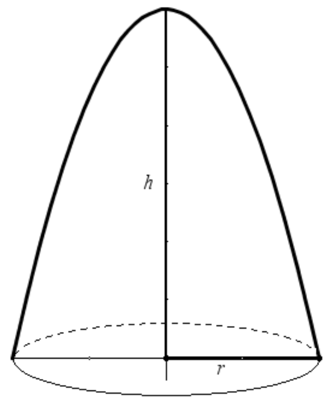
$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$



Omdrejningsparaboloide

$$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$K = \frac{\pi \cdot r \cdot \left(\sqrt{(r^2 + 4 \cdot h^2)^3} - r^3\right)}{(6 \cdot h^2)}$$



Paraboloidestub

$$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (r_G{}^2 + r_T{}^2) \cdot h$$

$$K = \frac{1}{6}\pi \cdot \frac{\sqrt{\left(4 \cdot h^2 \cdot r_T{}^2 + \left(r_T{}^2 - r_G{}^2\right)^2\right)^3} - \sqrt{\left(4 \cdot h^2 \cdot r_G{}^2 + \left(r_T{}^2 - r_G{}^2\right)^2\right)^3}}{h^2 \cdot \left(r_T{}^2 - r_G{}^2\right)}$$