ISBN 978-87-7066-8699

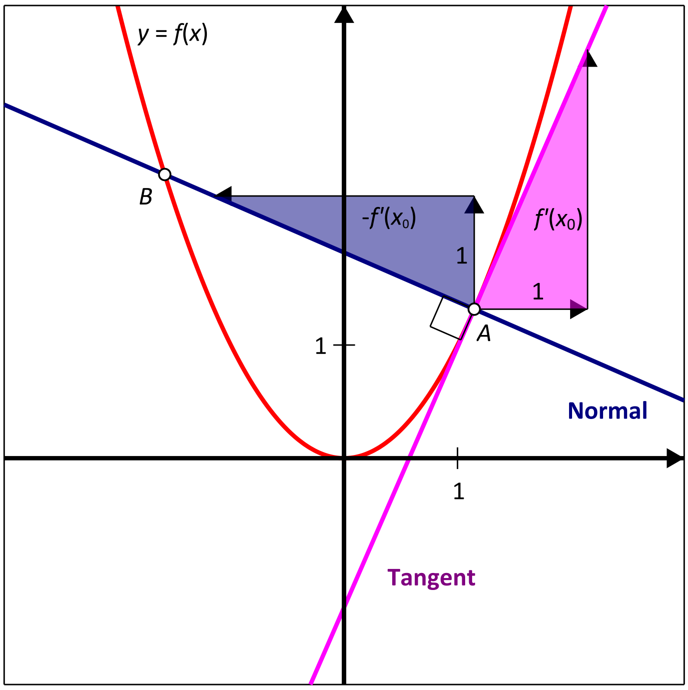
Projekt 5.12 Den korteste normal – introduktion til indhyldningskurver (evolut-ter)

Indledning

Hvis vi kigger på grafen for en differentiabel funktion *f*, kan vi gennem ethvert punkt $A(x_0, f(x_0))$ på grafen tegne en tangent med ligningen

$$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

Men vi kan også tegne en *normal*, dvs. en linje, der står vinkelret på tangenten i grafpunktet *A*.



a) Gøre rede for at normalen får ligningen

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

Hvis der er tale om en simpel graf, som fx en **parabel** $y = x^2$, vil normalen skære grafen i endnu et punkt *B* og derved frembringe en *korde*. Det er længden af denne korde *AB*, vi vil forsøge at minimere.

Forestiller vi os nu, at vi har tegnet sådanne normaler i alle den oprindelige kurves punkter, så har vi et samlet bundt af normaler. En *indhyldningskurve* til et bundt af linjer er en ny kurve med den egenskab, at alle linjer er tangenter til kurven. Det engelske ord er *envelope* (der betyder "konvolut"). Indhyldningskurven til det samlede bundt af normaler beskrevet ovenfor er altså en kurve, der tangerer alle disse normaler. Men forestiller vi os to normaler, en knyttet til x_0 , og en tæt ved knyttet til et *x*, som begge skal tangere den nye indhyldningskurve, så må denne med god tilnærmelse gå gennem deres skæringspunkt. Og når $x \to x_0$ vil dette skæringspunkt nærme sig centrum for krumningscirklen til den oprindelige kurve. Indhyldningskurven for et bundt normaler må derfor gå gennem centrene for kurvens krumningscirkler. Kurven gennem centrene for krumningscirklerne kaldes for kurvens *evolut*. Så:

Indhyldningskurven for kurvens normaler er lig med kurvens evolut

Vi vil nu udnytte værktøjet til en nærmere undersøgelse af disse fænomener.

ISBN 978-87-7066-8699

1. Dynamisk geometri

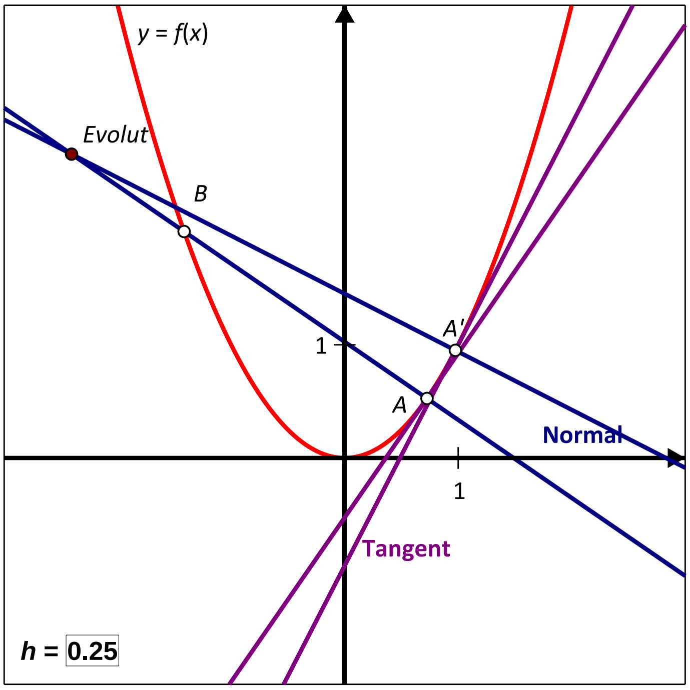
Vi vil først danne os et indtryk af situationen ved at bruge et dynamisk graftegneprogram.

b) Tegn grafen for funktionen $p(x) = x^2$ i dit dynamiske geometriprogram. Konstruer dernæst et frit punkt *A* på grafen.

c) Konstruér normalen til parablen i punktet *A,* fx som den vinkelrette til tangenten i *A*. Konstruér det andet skæringspunkt *B* mellem parablen og normalen.

d) Mål længden af korden *AB*. Træk nu det fire punkt *A* til en position, hvor længden er minimal. Hvad observerer du? Er der noget specielt ved punkt *B* i denne yderposition? Er der noget specielt ved korden i denne yderposition? Tør du give et bud på koordinaterne til *A* og *B* i denne yderposition?

e) Sæt en sporing på korden. Træk i det frie punkt. Kommentér det billede, der opstår når du sporer korden og derved frembringe en indhylningskurve for normalen. Hvordan ligger den yderste korde med den mindste længde i forhold til sporingen? Hvor langt ned kan *B* komme på parablen? Hvordan ligger den yderste korde med den mindste længde i forhold til den laveste højde for *B*?



f) Indhylningskurven for normalen, den såkaldte *evolut*, kan antydes i grafrummet på følgende måde: Hvis vi har to nabopunkter på grafen svarende til *x*-værdierne x_0 og x_0+h, så vil de tilhørende normaler skære hinanden i et punkt, som nærmer sig evolutpunktet, når *h* går mod 0. Vi vælger derfor en lille tilvækst *h,* i første omgang fx 0.25 så vi tydligt kan se forskel på de to normaler, og konstruerer først nabopunktet til $A(x_0, p(x_0))$, dvs. $A'(x_0 + h, p(x_0 + h))$, derefter den tilhørende normal og endelig skæringspunktet mellem de to normaler. Endelig lader vi de to normaler 'smelte sammen' ved at vælge *h* meget lille fx *h* = 0.000001.

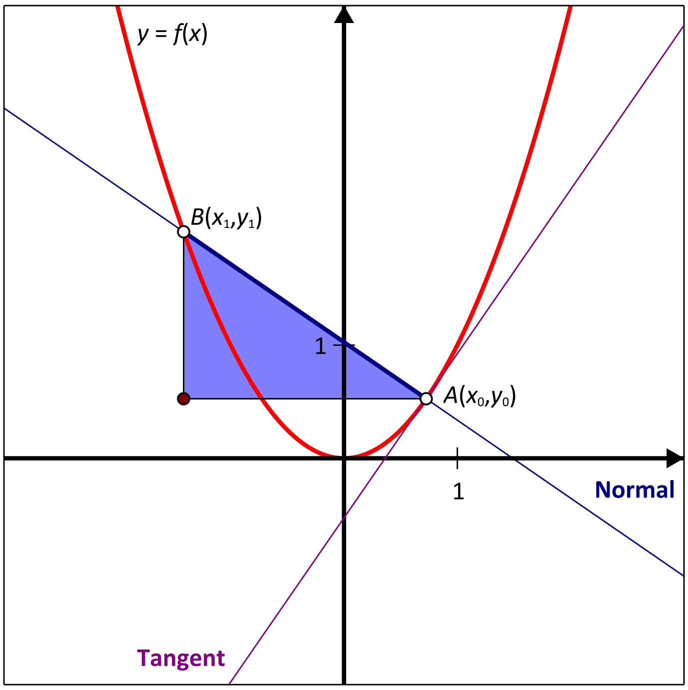
g) Sæt nu en sporing på evolutpunktet (eller konstruer det geometriske sted for evolutpunktet drevet af grafpunktet A). Prøv nu igen at overveje hvordan den 'yderste korde' med den mindste afstand ligger i forhold til evolutten?

ISBN 978-87-7066-8699

2. Den symbolske maskine

h) Opret nu funktionen $p(x) = x^2$ i dit CAS-program. Tildel det frie punkt *A* koordinaterne (x_0, y_0) og bestem nu ligningen for normalen *n* udtrykt ved x_0. Bestem koordinaterne (x_1, y_1) til skæringspunktet *B* mellem normalen og grafen udtrykt ved x_0.

i) Undersøg nu andenkoordinaten y_1 med henblik på at finde den laveste position for *B*, dvs. den mindste værdi for y_1. Bestem den tilhørende værdi for x_0 og illustrér din løsning med et velvalgt grafbillede.



j) Gør rede for at afstandskvadratet for korden *AB* er givet ved $AB^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$ og bestem afstandskvadratet udtrykt ved x_0. Gør også rede for at afstandskvadratet er minimalt, netop når afstanden er minimal.

Da det er nemmere at regne på afstandskvadratet end på selve afstanden vil vi i det følgende minimere afstandskvadratet for at finde den korteste normal!

k) Undersøg nu afstandskvadratet AB^2 med henblik på at finde den korteste normal, dvs. den mindste værdi for AB. Bestem den tilhørende værdi for x_0 og illustrér din løsning med et velvalgt grafbillede.

ISBN 978-87-7066-8699

Tredje del: Evolutten kommer på banen – en udfordring

l) Bestem nu symbolsk ligningen til nabonormalen gennem nabopunktet $A'(x_0+h, p(x_0+h))$. Bestem herefter koordinaterne til skæringspunktet mellem normalen og nabonormalen.

m) Lad nu tilvæksten *h* gå mod nul, dvs. $h \to 0$ og bestem herved koordinaterne til evolutpunktet *E* udtrykt ved x_0. Hvor ligger evolutpunktet *E*, når x_0 antager den ovenfor fundne værdi, der gør afstanden *AB* minimal? Illustrér din løsning med et velvalgt grafbillede.

n) Du har nu fundet evolutten udtrykt ved to ligninger, én for *x*-koordinaten og én for *y*-koordinaten. Bestem nu skæringspunkterne mellem evolutten og parablen ved at løse ligningssystemet bestående af de to evolutligninger og ligningen for parablen mht. *x*, *y* og x_0. Sammenlign med svaret i *m*.

o) Tegn evolutten ved at eliminere x_0 fra evolutligningerne, dvs. løse *x*-ligningen med hensyn til x_0 og derefter indsætte det fundne udtryk for x_0 i *y*-ligningen. Bestem også ligningen for evoluttens tangent i skæringspunktet med parablen. Konklusion?