Projekt 5.9 Keplers vintønder – Empiri og teori bag rumfangsbestemmelse hos Archimedes og Kepler

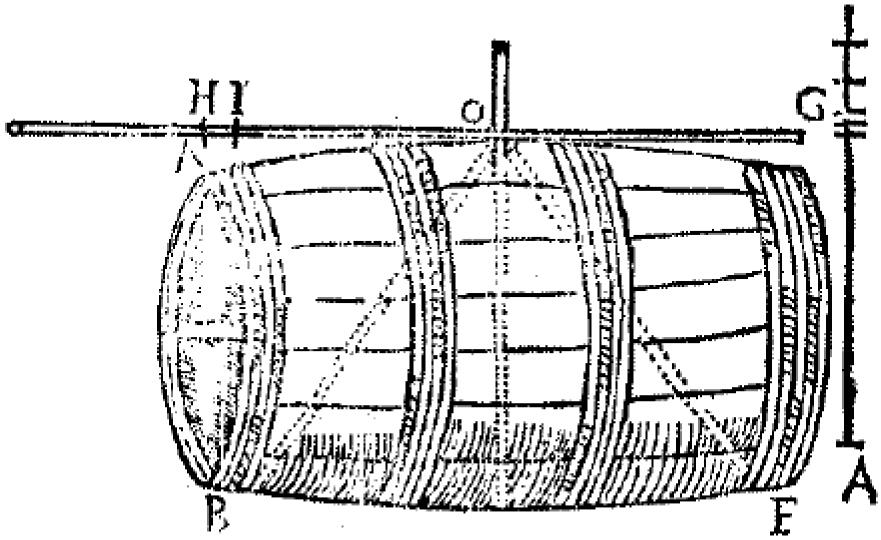
1. Indledning

Kepler fortæller selv om hvordan han i 1613 blev optaget af problemerne med opmåling af vintønder:

"Da jeg i november sidste år havde hjembragt en ny kone til mit hus, var det netop på dette tidspunkt, at en omfattende og lige så fremragende vinhøst blev ført op på utallige pramme langs Donau, og overfloden af denne rigdom blev fordelt til vores Noricum[1], så hele flodbredden i Linz var overstrøet med vintønder, der blev tilbudt til en overkommelig pris. Fordi min pligt som ægtemand og en god familiefader krævede at jeg forsynede mit hus med det nødvendige lager, lod jeg mange tønder hente til mit hus, for at opbevare dem der. Fire dage senere kom nu sælgeren med en målestok, som han brugte som det eneste værktøj, for at opmåle alle tønder uden at tage hensyn til deres form eller foretage eventuelle beregninger. Han satte spidsen af jernstangen skævt ned i spunsen af den fulde tønde indtil den nåede bunden af det cirkulære trælåg, som vi i det lokale sprog kalder basen. Når han på denne måde havde fundet begge sider af længden fra toppen af fadrundingen til det laveste punkt i de to cirkulære baser, fandt han på staven det mærke, der svarede til det punkt, hvor denne længde ophørte, og angav antallet af spande vin, der var hældt op i tønden, og satte det fastlagte antal i forhold til prisen.

Det virkede underligt, hvis det skulle være muligt at afgøre rumfanget af en halv tønde alene ud fra den fastlagte linje på tværs af tønden, og jeg var i tvivl om pålideligheden af disse målinger. "

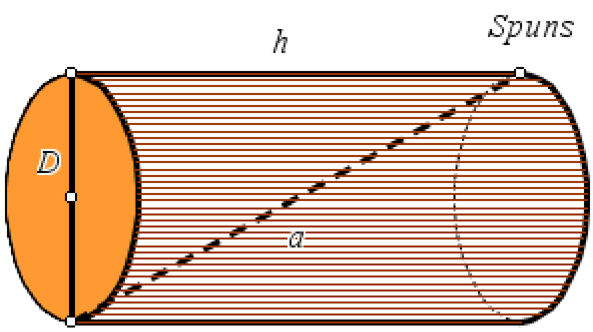
[1] Navnet på en gammel romersk provins, der nærmest svarer til vore dages Østrig.



Opmåling af vintønder: Figur fra Adrianus Metius 1633.
Vintønden opmåles ved at finde længderne *OB* og *OE* fra spunshullet *O* til bundpunkterne *B* og *E* for vintønden i begge retninger.

Kepler kastede sig derfor ud i et omfattende studium af vintønders rumfang, der resulterede i værket Stereometria Doliorum Vinarium (Rumfangsberegninger for vintønder) fra 1615, som han selv kaldte for et supplement til Archimedes. Her foregreb han dels den tidlige differentialregning ved at undersøge forskellige optimeringsproblemer, dels den tidlige integralregning ved at udlede mange af Archimedes rumfangsformler med simplere teknikker. Vi fortæller mere om Keplers bidrag til integralregningen i A-bogen. Her vil vi koncentrere os om at diskutere hans bidrag til den tidlige differentialregning.

Kepler forenklede problemet og betragtede i første omgang de to halvdele af en vintønde som cylindre. Og det er udelukkende denne forenklede version vi her vil betragte.



Halv vintønde

Som Descartes og Galilei var Kepler afskåret fra at bruge moderne funktioner og koordinatsystemer, så han nøjedes med at tabellægge problemet for at få indsigt i hvad der foregik.

ISBN 9788770668699

Her er en <u>tabel</u> fra Keplers Sterometria, der kaster lys over rumfanget af hans cylinder (svarende til en halv vintønde):

Højde	Basisdiameter	Søjlens omfang
1	20 –	399
2	20 –	792
3	20 –	1173
4	20 –	1536
5	19 +	1875
6	19 +	2184
7	19 –	2457
8	18 +	2688
9	18 –	2871
10	17 +	3000
11	17 –	3069
Kvadratisk fordobling		3080
12	16	3072
13	15 +	3003
14	14 +	2856
Lige store		2828
15	13 +	2625
16	12	2364
17	11 –	1887
18	8 +	1368
19	6 +	741
20	0	0

Tafel der bei der Verfertigung der österreichischen Fässer verwendeten Verhältnisse.

Höhe	Basisdurchmesser	Inhalt der Säule
1	20 —	399
2	20 —	792
3	20 —	1173
4	20 —	1536
5	19 +	1875
6	19 +	2184
7	19 —	2457
8	18 +	2688
9	18 —	2871
10	17 +	3000
11	17 —	3069
Subsemiduples Verhältnis		3080
12	16	3072
13	15 +	3003
14	14 +	2856
Einander gleich		2828
15	13 +	2625
16	12	2364
17	11 —	1887
18	8 +	1368
19	6 +	741
20	0	0

Tabel fra Keplers:
Neue Stereometrie Der Fasser
(Tysk oversættelse 1908).

a) Undersøg Keplers tabel med støtte i grafer og ligninger: Hvilken sammenhæng gælder der åbenbart mellem højden og diameteren i hans cylinder? Hvad er længden af diagonalen a i hans cylinder? Hvilken formel har Kepler brugt til at udregne det samlede omfang af cylinderen? Hvad er sammenhængen mellem omfanget og rumfanget af cylinderen? NB! Der er et par trykfejl i tabellen! Kan du finde dem?

b) Hvad menes der med 'Lige store' i tabellen? Hvad menes der med 'Kvadratisk fordobling' i tabellen?

Ifølge tabellen ser det ud som om omfanget (og dermed rumfanget) er maksimalt, når diameteren er et sted mellem 11 og 12 og højden tilsvarende et sted mellem 16 og 17 og det maksimale omfang synes at være 3080. Kepler bemærkede nu også at omfanget kun varierer langsomt i nærheden af den maksimale værdi.

c) Undersøg variationen i omfanget af cylinderen og forklar med egne ord, hvad Kepler mon mener med at omfanget kun varierer langsomt i nærheden af det maksimale omfang. Illustrer din forklaring med passende tabeller og grafer.

Fordi omfanget varierer så langsomt lige i nærheden af maksimumspunktet, kaldes dette også for et *stationært punkt*, idet væksten spå at sige går i stå i dette punkt. Det er altså her tangenten er vandret. Heri så Kepler nu en løsning på sit vintøndeproblem: Hvis vintøndefabrikanterne i Linz benytter tønder, der ligger tæt op af de maksimale tønder, så giver det god mening at bestemme deres rumfang alene ved en opmåling af den halve diagonal fra spuns til modsat bind. Kepler målte nu på sine vintønder og fandt at de netop lå tæt op af målene fra den optimale vintønde! Det er ikke trivielt. For eksempel passede tønderne fra hans barndomsegn *ikke* med de optimale mål!

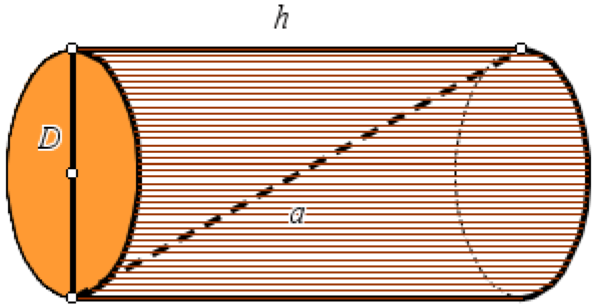
d) Forklar dette med egne ord!

2. Keplers cylinderproblem

Men Kepler var selvfølgelig ikke matematiker for ingen ting, så han udmøntede resultatet af sine undersøgelser i en matematisk sætning om cylinderens rumfang:

Sætning V:
Blandt alle cylindre med den samme diagonal er den største cylinder, dvs. cylinderen med det maksimale rumfang, den, hvor forholdet mellem kvadratet på diameteren og kvadratet på højden er 2.

Det er denne sætning vi nu vil prøve at forstå:



a) Hvilken sammenhæng gælder der mellem højden h, diameteren D og diagonalen a?

b) Hvordan udregnes rumfanget for en cylinder?

c) Rumfanget af cylinderen afhænger af såvel højden h, som diameteren D. Vi kan nu eliminere en af disse variable ved at udnytte resultatet fra spørgsmål e). Hvilken af de to variable er den nemmeste at eliminere?

Du skulle nu gerne have udtrykt rumfanget ved en formel af typen

$$V(x) = \frac{\pi}{4} \cdot x \cdot \left(a^2 - x^2\right)$$

d) Hvilken rolle spiller den uafhængige variabel i denne formel for cylinderens rumfang?

Det drejer sig altså om at maksimere tredjegradspolynomiet $p(x) = x \cdot \left(a^2 - x^2\right)$, hvor $0 < x < a$.

e) Hvilken sammenhæng er der mellem dette tredjegradspolynomium og Keplers tabel?

ISBN 9788770668699

f) Differentiér nu tredjegradspolynomiet og finde herved det stationære punkt. Illustrér din løsning med en passende graf.

g) Gør rede for hvorfor det fundne resultat er ækvivalent med Keplers sætning V om den maksimale cylinder med en fast diagonal.

3. Maksimum for et tredjegradspolynomium à la Archimedes

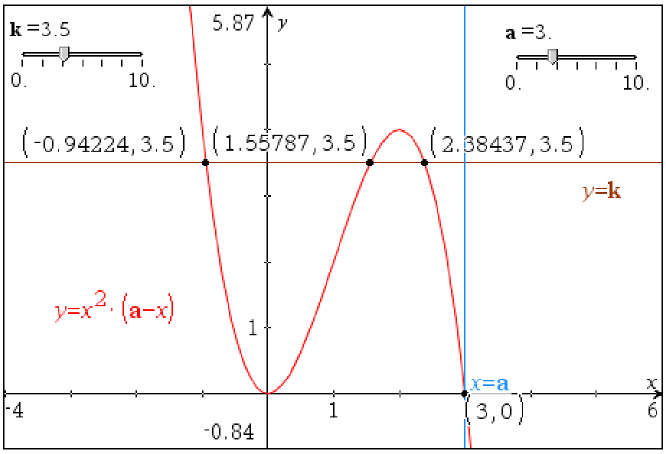
Da Kepler ikke kendte til differentialregning og heller ikke til polynomier kan det være værd at overveje, hvordan han så kunne løse problemet. Han kendte til Archimedes værker og i et af Archimedes værker bestemmer Archimedes maksimum for tredjegradspolynomiet $x^2 \cdot (a-x) = k$, jfr. Eksemplet om Archimedes' undersøgelse af kugleafsnit, kapitel 3, afsnit 2. Vi vil nu se nærmere på hvordan Archimedes løste dette optimeringsproblem og derefter kan du selv prøve kræfter med Keplers problem

Archimedes udgangspunkt er kendskab til keglesnittene, i dette tilfælde, parablen $y = x^2$, og den ligesidede hyperbel $y = \dfrac{k}{a-x}$. Løsningen af tredjegradsligningen kan nemlig omformes til et tilsvarende problem om skæring mellem disse to keglesnit:

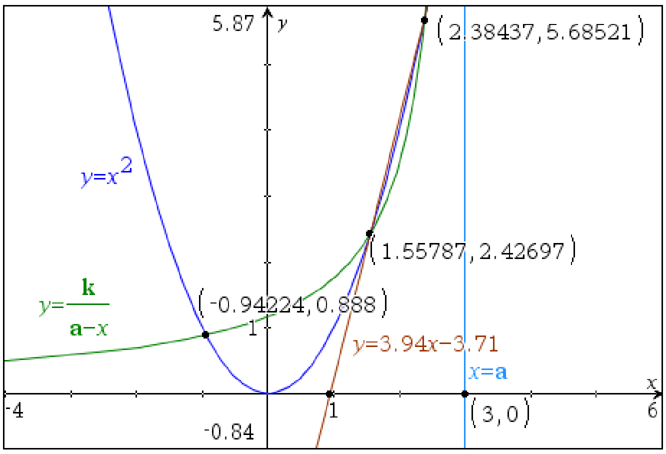
$$x^2 \cdot (a-x) = k \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{k}{a-x}.$$

Opret nu to grafrum lige oven over hinanden med samme enheder på *x*-aksen, så du umiddelbart kan sammenligne de to grafrum. I det øverste grafrum oprettes skydere for parametrene *a* og *k*, fx med værdierne *a* = 3 og *k* = 1.

I det øverste grafrum tegnes graferne for tredjegradspolynomiet $y = x^2 \cdot (a-x)$ og sekanten $y = k$. I det nederste grafrum tegnes graferne for de to keglesnit $y = x^2$ og $y = \dfrac{k}{a-x}$.



Bestem i begge grafrummene skæringspunkterne mellem graferne. Tilføj også sekanten i det nederste grafrum som forbinder de to skæringspunkter.

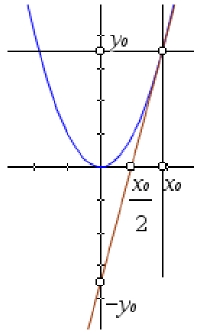


Træk nu forsigtigt i skyderen for *k* (små trin!). Hvad sker der når skæringspunktet forsvinder? Hvad sker der med sekanten? Hvordan ligger de to grafer i forhold til hinanden, når de to skæringspunkter er smeltet sammen til et skæringspunkt? Hvilken værdi synes *x* at have i det fælles røringspunkt? Hvilken værdi synes konstanten *k* at have?

ISBN 9788770668699

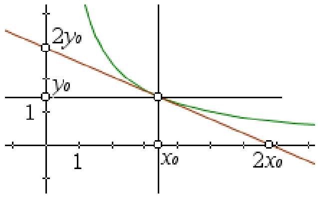
For at komme videre i analysen må vi have styr på keglesnittenes tangenter. Det havde Archimedes fra Apollonius, der på rent geometrisk manér havde fundet tangenterne til keglesnittene. For parablen og den ligesidede hyperbel gælder der de følgende særligt simple karakteriseringer, som vi gengiver i moderne formulering med brug af koordinatsystemer:

Sætning 1: Tangenten til parablen $y = a \cdot x^2$ med røringspunktet (x_0, y_0) skærer *x*-aksen, dvs. tangenten i toppunktet, halvejs henne, dvs. i $x = \frac{x_0}{2}$. Tilsvarende skærer den *y*-aksen, dvs. parablens akse, lige så langt på den anden side af toppunktet, dvs. i $y = -y_0$.



Øvelse Vis selv sætningen ved først at opstille ligningen for tangenten gennem $(x_0, a \cdot x_0^{\ 2})$ med brug af sætning 5 i kapitel 5A, og dernæst indsætte $x = 0$, samt løse ligningen $y = 0$.

Sætning 2: Tangenten til den ligesidede hyperbel $y = \frac{k}{x}$ med røringspunktet (x_0, y_0) skærer *x*-aksen, dvs. den vandrette asymptote dobbelt så langt ude, dvs. i $x = 2x_0$. Tilsvarende skærer den *y*-aksen, dvs. den lodrette asymptote, dobbelt så langt ude, dvs. i $y = 2y_0$.



Øvelse Vis selv sætningen ved først at opstille ligningen for tangenten gennem $(x_0, \frac{k}{x_0})$ med brug af sætning 5 i kapitel 5A, og dernæst indsætte $x = 0$, samt løse ligningen $y = 0$.

Bevæbnet med disse geometriske karakteriseringer af tangenter til keglesnit vender vi tilbage til Archimedes analyse af tredjegradsligningen. I toppunktet for tredjegradspolynomiets graf har vi en vandret tangent. Det udnytter vi til at finde maksimumspunktet ved hjælp af differentialregning. Men samtidigt er det også der, hvor parablen og den ligesidede hyperbel har en fælles tangent! Det kan vi nu udnytte til at finde maksimumspunktets *x*-værdi, dvs. røringspunktet for den fælles tangent.

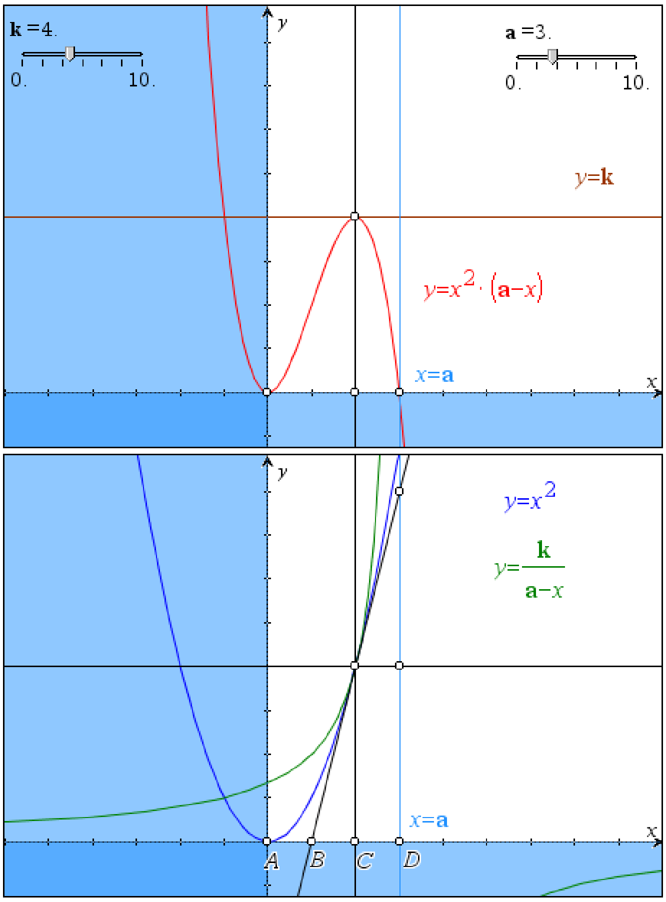
ISBN 9788770668699

Archimedes var kun interesseret i *målbare* størrelser (positive tal!), dvs. hvad der foregår i første kvadrant. VI kan derfor gråtone de andre kvadranter, så det er tydeligt at tredjegradsligningen har 0, 1 eller 2 *positive* løsninger, når *k* er *positiv*, og at den vandrette tangent netop svarer til tilfældet 1 *positiv* løsning.

Det øverste grafrum:
Den kan findes med brug af differentialregning, idet vi løser ligningen for stationære punkter:

$$0 = p'(x) = -3x^2 + 2a \cdot x$$
$$0 = -x \cdot (3x - 2a)$$
$$x = \frac{2}{3} \cdot a \quad \text{(i det } x = 0 \text{ ikke er positiv)}$$

Det nederste grafrum: *Uden differentialregning*!
Da fællestangenten er en parabeltangent gælder *AB* = *BC*. Da fællestangenten er en hyperbeltangent gælder tilsvarende *BC* = *CD*, dvs. de fire punkter *A*, *B*, *C* og *D* ligger ækvidistant. Derfor gælder netop $x_0 = \frac{2}{3} \cdot a$, hvor x_0 er *x*-koordinaten til det fælles røringspunkt.



Vi kan selvfølgelig også sætte koordinater på til sidst:

$x_A = 0$, $x_B = \frac{x_0}{2}$ (fordi det er en parabeltangent), $x_C = x_0$ og endelig $x_D = a$. Men fordi det er en hyperbeltangent gælder: $x_C - x_B = x_D - x_C$ dvs.

$$x_0 - \frac{x_0}{2} = a - x_0$$
$$\frac{1}{2} \cdot x_0 = a - x_0$$
$$\frac{3}{2} \cdot x_0 = a$$
$$x_0 = \frac{2}{3} \cdot a$$

I begge tilfælde finder vi den tilsvarende værdi for *k* til $y_0 \cdot (a - x_0) = x_0{}^2 \cdot (a - x_0) = \frac{4}{9} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a = \frac{4}{27} \cdot a^3$.

I dag vil vi foretrække at løse optimeringsproblemet ved brug af differentialregning, fordi det giver en meget generel metode, der fx virker på alle polynomier. Men Kepler kendte ikke differentialregningen, hvorfor det blev Fermat, der først løste problemet med at finde stationære punkter for polynomier med brug af differentialregning. Så Kepler var henvist til at benytte Archimedes metode med skæring/røring af to keglesnit.

ISBN 9788770668699

4. Maksimum for et tredjegradspolynomium à la Kepler

Du kan nu selv prøve kræfter med Keplers problem. Keplers tredjegradspolynomium er givet ved

$$p(x) = x \cdot (a^2 - x^2)$$

hvor a er diagonalen i cylinderen.

Ligesom før kan vi omskrive tredjegradsligningen $p(x) = k$ så den i stedet handler om skæringen mellem to keglesnit, nemlig parablen $y = a^2 - x^2$ og den ligesidede hyperbel $y = \frac{k}{x}$.

a) Gør rede for detaljerne i omformningen.

b) Opret nu to grafrum lige oven over hinanden med samme enheder på x-aksen, så du umiddelbart kan sammenligne de to grafrum. I det øverste grafrum oprettes skydere for parametrene a og k, fx med værdierne a = 3 og k = 1.
I det øverste grafrum tegnes graferne for tredjegradspolynomiet $y = x \cdot \left(a^2 - x^2\right)$ og sekanten $y = k$. I det nederste grafrum tegnes graferne for de to keglesnit $y = a^2 - x^2$ og $y = \frac{k}{x}$.

c) Bestem i begge grafrummene skæringspunkterne mellem graferne. Tilføj også sekanten i det nederste grafrum som forbinder de to skæringspunkter.

d) Træk nu forsigtigt i skyderen for k (små trin!). Hvad sker der når skæringspunktet forsvinder? Hvad sker der med sekanten? Hvordan ligger de to grafer i forhold til hinanden, når de to skæringspunkter er smeltet sammen til et skæringspunkt? Hvilken værdi synes x at have i det fælles røringspunkt? Hvilken værdi synes konstanten k at have?

e) Tag nu udgangspunkt i det øverste grafrum og udnyt differentialregning til at finde det stationære punkt med den vandrette tangent. Hvilken sammenhæng gælder der mellem x_0 og a? Hvilken sammenhæng gælder der mellem k og a i det stationære punkt? Kommentér resultaterne i lyset af Keplers egen løsning på problemet.

f) Tag derefter udgangspunkt i det nederste grafrum og udnyt din viden om tangenter til keglesnit til at finde en sammenhæng mellem x_0 og a. Hvilken sammenhæng gælder der mellem k og a når de to keglesnit har en fælles tangent? Kommentér resultaterne i lyset af Keplers egen løsning på problemet.