ISBN 9788770668699

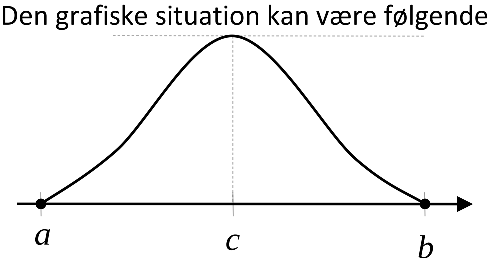
Projekt 5.7 Hovedsætninger om differentiable funktioner – et opgaveforløb

Projektet er en udvidelse af afsnittet i grundbogen, idet der er lagt en række opgaver ind. Vælger man på et hold at arbejde med dette som supplerende stof, kan opgaverne styrke forståelsen.

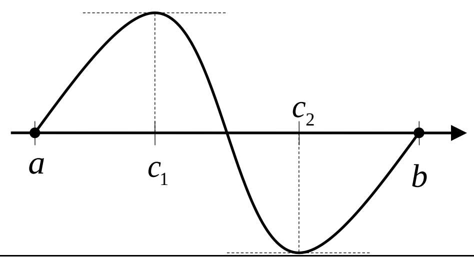
Middelværdisætningen er et stærkt redskab i teoretisk matematik, hvorimod den mere sjældent finder anvendelse til løsning af praktiske beregningsopgaver. Det skyldes, at sætningen har en anden karakter end vi er vant til: Det er en såkaldt *eksistenssætning*, der udtaler sig om, at der *findes* et tal, hvorom noget bestemt gælder; men sætningen siger ikke *hvilket* tal, eller noget som helst om, hvordan vi finder dette tal.

Rolles sætning, som vi først viser, er et specialtilfælde af Middelværdisætningen; men vi viser den først, fordi den kan anvendes til at give et grafisk set letforståeligt bevis for middelværdisætningen.

ROLLES SÆTNING
Hvis *f* er differentiabel i intervallet $[a;b]$, og $f(a)=f(b)=0$, så findes et $c\in]a;b[$, hvor $f'(c)=0$.
Den grafiske situation kan være følgende:



eller



Bemærkning. Sætningen optræder første gang i en bog, som den franske matematiker Michel Rolle udgav i 1691. Rolle beviste ikke sætningen, men formulerer den som et hjælpemiddel til at løse visse ligninger. Han er ikke kendt for meget andet i matematikhistorien.

Bevis
Vi skelner mellem to tilfælde:

1. *f* er konstant lig med 0. Så er $f'(x) = 0$ for *alle x*, og sætningen er indlysende sand.

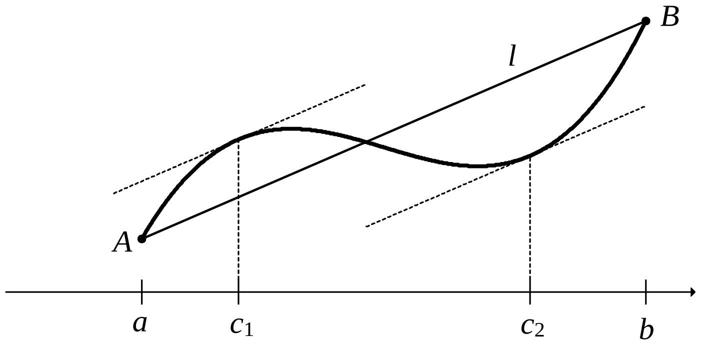
2. *f* er ikke konstant. Da *f* specielt er kontinuert, siger 2. hovedsætning om kontinuerte funktioner, at $Vm(f)$ er et lukket interval: $Vm(f)=[\alpha;\beta]$. α og β er henholdsvis minimum og maksimum, og mindst ét af dem er forskelligt fra 0; f.eks. $\beta\neq 0$.

Maksimum antages i et tal $c\in]a;b[$: $f(c)=\beta$. Tegn situationen!
Sætningen om lokale ekstrema siger da, at $f'(c) = 0$.
Men det var netop påstanden i Rolles sætning, som hermed er vist.

Ved hjælp af Rolles sætning vises nu:

MIDDELVÆRDISÆTNINGEN
Hvis *f* er differentiabel i $[a;b]$, så findes et tal $c\in]a;b[$, så $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Den grafiske situation kan være følgende:

ISBN 9788770668699



Bemærkning 1:
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ er hældningen på linjen *l*. Det er altså i en vis forstand den gennemsnitlige stigning, når vi går fra *A* til *B*. Deraf navnet Middelværdisætningen.

Bemærkning 2:
Du kan ***her*** finde en animation, der illustrerer middelværdisætningen for en vilkårlig kurve.

Bevis
Lad *l*(*x*) være den lineære funktion, hvis graf er *l*.
Så er $l(a)=f(a)$ og $l(b)=f(b)$, og endvidere $l'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ for alle *x*.
Vi danner nu en ny funktion *g*: $g(x)=f(x)-l(x)$

g(*x*) opfylder betingelserne i Rolles sætning:
Den er differentiabel, og $g(a)=f(a)-l(a)=0$, samt $g(b)=f(b)-l(b)=0$.
Vi anvender Rolles sætning på *g*: Der findes et $c\in\,]a;b[$, så:

$$g'(c)=0 \Leftrightarrow f'(c)-l'(c)=0 \Leftrightarrow f'(c)=l'(c) \Leftrightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Overvej hvorfra vi fik den sidste identitet!
Denne sidste identitet var netop påstanden i Middelværdisætningen, som hermed er vist.

Bemærk at konstruktionen af *g* rent grafisk svarer til at vi drejer systemet med *f* og *l* ned, så *A* og *B* kommer til at ligge på *x*-aksen. Her anvendes Rolles sætning – der er en vandret tangent – og vi drejer så tilbage igen, og får en tangenthældning svarende til stigningstallet for *l*.

ISBN 9788770668699

ØVELSE 1 *(forudsætter, at man har gennemgået integralregning.)*

a) Anvend Middelværdisætningen til at bevise *Integralregningens middelværdisætning*:

Hvis *f* er kontinuert i $[a;b]$, så findes et tal *c*, så:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \text{ eller skrevet på en anden måde: } \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

(Hjælp: Lad *F*(*x*) være en stamfunktion til *f*(*x*). Opskriv middelværdisætningen for *F*(*x*) i intervallet $[a;b]$, og udnyt definitionen på det bestemte integral.)

b) Lav en tegning, hvor *f*(*x*) > 0 og giv en grafisk begrundelse for Integralregningens middelværdisætning.

Vi har nu apparatet klar til at bevise:

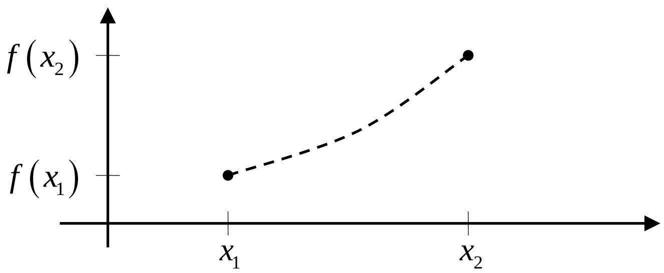
MONOTONISÆTNINGEN

Hvis f er differentiabel i et interval I, så gælder:

1. $f'(x)>0$ for alle $x\in I \Rightarrow f$ er voksende i *I*
2. $f'(x)<0$ for alle $x\in I \Rightarrow f$ er aftagende i *I*
3. $f'(x)=0$ for alle $x\in I \Rightarrow f$ er konstant i *I*

Bevis for 1

Vælg x_1 og x_2, så $x_1<x_2$. Vi skal vise, at *f* er voksende, dvs. vise, at $f(x_2)>f(x_1)$:



Betragt nu *f* på intervallet $[x_1;x_2]$, og anvend Middelværdisætningen her:

Der findes et *c* mellem x_1 og x_2, så: $f'(c)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Omskriv til: $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$

Se nu på *fortegnet* for højre side:

$f'(c)>0$ ifølge antagelsen i 1.

$(x_2-x_1)>0$, idet tallene er valgt sådan.

Derfor er hele højre side positiv; men det betyder:

$f(x_2)-f(x_1)>0$, eller med andre ord: $f(x_2)$ er større end $f(x_1)$.

Konklusion: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, eller: *f* er voksende.

ØVELSE 2

Gennemfør selv beviserne med de ændringer, der skal laves i punkt 2 og 3.

ISBN 9788770668699

Opgaver

1. Du er kørt i bil fra en by *A* til en by *B* 150 km borte. Turen tog i alt 2 timer. Argumentér for, at uanset hvordan du kørte, så var farten mindst én gang under turen præcis 75 km/t.

2. To fly på ruten København – New York starter samtidig fra hver sin lufthavn. Turen for begge fly tog 7 timer. Vis, at de på et tidspunkt under flyveturen fløj med nøjagtig samme fart (bortset fra start- og sluthastigheden på 0 km/t).

3. Illustrer middelværdisætningen for $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$ i intervallet $[-2;2]$:
   a) Vis at påstanden i sætningen er følgende:
   Der findes et tal *c* i intervallet $[-2;2]$, så $f'(c) = 3$.
   b) Bestem det eller de tal c, hvor $f'(c) = 3$, og demonstrer derved, at sætningen er sand i dette tilfælde.

4. Illustrer middelværdisætningen for $f(x) = x^2$ i intervallet $[a;b]$:
   a) Vis at påstanden i sætningen er følgende:
   Der findes et tal c i intervallet $[a;b]$, så $f'(c) = \dfrac{b^2 - a^2}{b - a}$.
   b) Vis at dette svarer til ligningen: $f'(c) = a + b$.
   c) Bestem det tal *c*, der opfylder denne ligning, og vis at dette ligger i $[a;b]$.
   d) Illustrer resultatet grafisk.

5.
   a) Vis at såfremt *f* er differentiabel og har 4 forskellige nulpunkter i $[a;b]$, så har $f'(x)$ mindst 3 forskellige nulpunkter i samme interval.
   b) Generaliser påstanden i a) til situationen, hvor *f* har *n* forskellige nulpunkter i $[a;b]$.

6.
   a) Vis at såfremt *f* er to gange differentiabel i $[a;b]$, og *f* har tre forskellige nulpunkter, da har $f''(x)$ mindst ét nulpunkt i samme interval.
   b) Formuler selv, hvad der tilsvarende gælder om den tre gange afledede $f^{(3)}$, hvis *f* er tre gange differentiabel i $[a;b]$, og *f* har 4 nulpunkter i dette interval.
   c) Anvend ovenstående teknik til at argumentere for, at et *n*'tegradspolynomium højst har *n* forskellige rødder.

7.
   a) Vis at såfremt *f* og *g* er differentiable i $[a;b]$, $f(a) \leq g(a)$, og $f'(x) \leq g'(x)$ for $a < x < b$, så gælder, at $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in [a;b]$.
   (Hjælp: Lav et indirekte bevis, dvs. antag der findes et x_0, hvor $f(x_0) > g(x_0)$, og udnyt så Middelværdisætningen).
   b) Vis tilsvarende: Hvis der yderligere gælder: $f'(x) < g'(x)$ for alle $x \in [a;b]$, så er også $f(x) < g(x)$ for alle $x \in [a;b]$.

8. (forudsætter kendskab til de trigonometriske funktioner)
   Anvend resultaterne i opgave 7 til at vise følgende uligheder: $\sin(x) < x < \tan(x)$, for $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

ISBN 9788770668699

9. Vis *Den generaliserede middelværdisætning*:
   Hvis *f* og *g* er differentiable i intervallet $I=[a;b]$, og $g'(x)\neq 0$ i *I*, så findes et tal *c* i *I*, så:
   $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$
   (Hjælp: Argumenter først ved hjælp af middelværdisætningen for, at $g(b)-g(a)\neq 0$. Betragt dernæst funktionen $h(x)=(f(b)-f(a))\cdot g(x)-(g(b)-g(a))\cdot f(x)$, og vis $h(b)-h(a)=0$. Anvend så endelig middelværdisætningen på $h(x)$.)

10. Vis ved hjælp af resultatet i opgave 9, Den generaliserede middelværdisætning, følgende vigtige sætning til vurdering af grænseværdier (sætningen kaldes l'Hôpital's regel, opkaldt efter en rig fransk adelsmand, der købte sætningen af en knap så rig, men meget dygtig matematiker):
    Hvis *f* og *g* begge har grænseværdien 0 for $x\to a$, hvis $g(x)$ og $g'(x)\neq 0$, når $x\neq a$, og hvis $\frac{f'(x)}{g'(x)}\to L$, når $x\to a$, så gælder også, at $\frac{f(x)}{g(x)}\to L$, når $x\to a$.

    Sætningen gælder også, hvis vi indskrænker os til at se på grænseværdier fra højre eller venstre.
    (Hjælp: Hvis *f* og *g* ikke er kontinuerte i *a*, så lav *en kontinuert udvidelse* af dem, dvs. definér funktioner *F*(*x*) og *G*(*x*), der er lig med henholdsvis *f* og *g* når $x\neq a$, og som begge er 0 i *a*. Vælg dernæst et $x\neq a$, og vis ud fra Den generaliserede middelværdisætning, at der findes et *c* mellem *a* og *x*, så:
    $$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$
    Foretag nu grænseovergangen $x\to a$ og konkludér ud fra ovenstående ligning.)

11. Anvend opgave 10 til at finde følgende (a, d og e forudsætter kendskab til de trigonometriske funktioner):

    a) grænseværdien af $\frac{\sin(t)}{t}$, for $t\to 0$

    b) grænseværdien af $\frac{x^4+3x^3-2x}{4x^2+5x}$, for $x\to 0$

    c) grænseværdien af $\frac{\ln(x)}{x^2-1}$, for $x\to 1$

    d) grænseværdien af $\frac{\sin^2(t)}{t-\pi}$, for $t\to\pi$

    e) grænseværdien af $\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}$, for $x\to 0$

    (For e: sæt på fælles brøkstreg, og udnyt reglen to gange.)

ISBN 9788770668699

12. En opgave indeholder følgende delspørgsmål: Bestem monotoniforhold for $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-6}$.
    Gør rede for, hvor præcis det er, vi anvender monotonisætningen, og hvor vi anvender den første hovedsætning om kontinuerte funktioner.

13. Anvend monotonisætningen til at bevise følgende formler:

    $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$ $\qquad\qquad$ $\ln\left(x^r\right)=r\cdot\ln(x)$

    (Bemærk: Du må ikke anvende regnereglerne for logaritmefunktionerne; det er jo dem, vi er i færd med at vise. Du må derimod anvende, at $\ln'(x)=\frac{1}{x}$, og at $\ln(1)=0$.)
    (Hjælp: Betragt funktionen $g(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln(x)$.)

14. Anvend monotonisætningen til at vise: $e^x>1+x$, for $x\neq 0$.
    (Hjælp: Opdel i to tilfælde: $x<0$ og $x>0$, og betragt funktionen $f(x)=e^x-(1+x)$.
    Alternativt bevis: Udnyt resultatet i opgave 7.)

15.
    a) Anvend monotonisætningen og resultatet i opgave 14 til at vise:
    $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$, når $x>0$.
    b) Anvend monotonisætningen og resultatet ovenfor til at vise:
    $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}$, når $x>0$.
    c) Generaliser resultatet ovenfor og vis:
    $e^x\geq 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots$, når $x>0$.

16. (Forudsætter at man har gennemgået integralregning)
    Den centrale sætning om stamfunktioner siger: Hvis *f* er kontinuert med stamfunktionen *F*, så kan enhver anden stamfunktion til *f* skrives på formen: *F*(*x*) + *k*, hvor *k* er en konstant. Find beviset for denne sætning, og gør rede for, hvor præcis det er, vi anvender monotonisætningen.