ISBN 9788770668699

Projekt 5.4. Den størst mulige firkant bestemt ved hjælp af differentialregning

I kapitel 1 om optimeringsopgaver ligger Projekt 1.1 *Optimeringsproblemer i geometri – eksperimenter og beviser*. Her vil vi arbejde videre med problemstillingen, men nu inddrage differentialregning.

En firkant adskiller sig markant fra en trekant ved, at siderne i en firkant ikke fastlægger firkanten som en bestemt figur. Det gør siderne i en trekant, men forestiller vi os siderne i en firkant hæftet sammen med nogle hængsler, så er figuren leddeløs og kan tage alle mulige former. Et af de spørgsmål, man undersøger i projekterne i B-bogen er følgende: Givet 4 sidelængder, a,b,c og d ud fra hvilke, der kan konstrueres en firkant - hvilken af alle de mulige firkanter har da størst areal? Dette er dér undersøgt med geometriske metoder. Her vil problemet nu blive undersøgt med anvendelse af differentialregning.

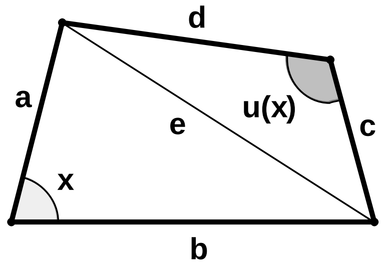
Vi vil finde den største firkant ved at finde de stationære punkter for arealfunktionen $T(x)$, se nedenfor. Det kræver, at vi først løser ligningen $T'(x)=0$, og dernæst afgør, hvorvidt de fundne stationære punkter svarer til maksima, minima eller evt. blot vandrette vendetangenter. Til slut skal vi argumentere for et globalt maksimum.

Arealet af firkanten kan udtrykkes ved arealfunktionen:

$$T(x)=\tfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(x)+\tfrac{1}{2}\cdot c\cdot d\cdot\sin(u(x))$$

Her er x vinklen mellem siderne a og b, mens $u(x)$ er den modstående vinkel, dvs. vinklen mellem siderne c og d. Den sidste er bestemt ved cosinusrelationerne for de to trekanter frembragt af diagonalen e:

$$\cos(u(x))=\frac{c^2+d^2-e^2}{2\cdot c\cdot d}$$
$$e^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos(x)$$



Ved at kombinere disse to udtryk finder vi:

$$\begin{aligned}\cos(u(x))&=\frac{c^2+d^2-a^2-b^2+2\cdot a\cdot b\cdot\cos(x)}{2\cdot c\cdot d}\\ &=\frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2\cdot c\cdot d}+\frac{a\cdot b}{c\cdot d}\cdot\cos(x)\end{aligned}$$

Det gør det nemt at differentiere $u(x)$ ved at udnytte reglen for sammensat differentiation:

$$\begin{aligned}-\sin(u(x))\cdot u'(x)&=\frac{a\cdot b}{c\cdot d}\cdot\left(-\sin(x)\right)\quad\Rightarrow\\ u'(x)&=\frac{a\cdot b}{c\cdot d}\cdot\frac{\sin(x)}{\sin(u(x))}\end{aligned}$$

I alt finder vi derfor:

$$\begin{aligned}T'(x)&=\tfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\cos(x)+\tfrac{1}{2}\cdot c\cdot d\cdot\cos(u(x))\cdot u'(x)\\ &=\tfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\cos(x)+\tfrac{1}{2}\cdot\cancel{c\cdot d}\cdot\cos(u(x))\cdot\frac{a\cdot b}{\cancel{c\cdot d}}\cdot\frac{\sin(x)}{\sin(u(x))}\\ &=\tfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\frac{\sin(u(x))\cdot\cos(x)+\cos(u(x))\cdot\sin(x)}{\sin(u(x))}\end{aligned}$$

Men her kan vi udnytte additionsformlen for sinus-funktionen

$$\sin(u+v)=\sin(u)\cdot\cos(v)+\cos(u)\cdot\sin(v)$$

ISBN 9788770668699

Derved forenkles udtrykket for den afledede funktion $T\,'(x)$ til formen:

$$T\,'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{\sin(x+u(x))}{\sin(u(x))}$$

Dette er vores nøgleresultat! Det viser at de stationære punkter for arealfunktionen fremkommer netop når tælleren er nul, dvs. når $\sin(x+u(x)) = 0$

Men sinusfunktionen er nul netop når vinklen er 0 eller 180°. Da begge argumenterne *x* og *u*(*x*) ligger mellem 0 og 180° kan summen af de to vinkler ikke være nul. *De stationære punkter svarer derfor til de firkanter, hvor de modstående vinkler er supplementvinkler.*

Men vi kan slutte mere ud af det ovenfor fundne: Funktionen *u*(*x*) er en voksende funktion, da den har den afledede:

$$u\,'(x) = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \cdot \frac{\sin(x)}{\sin(u(x))}$$

Her er sinus positiv fordi vinklerne begge ligger mellem 0 og 180°. Heraf følger at også summen af de to vinkler, dvs. *x* + *u*(*x*) er en voksende funktion. *Der er derfor højst et stationært punkt*.

Ydermere er arealfunktionen med den afledede

$$T\,'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{\sin(x+u(x))}{\sin(u(x))}$$

voksende forud for det stationære punkt, fordi den afledede er positiv, så længe *x* + *u*(*x*) er mindre end π og tilsvarende aftagende efter det stationære punkt, fordi sinus skifter fortegn, når vi passerer det stationære punkt. *Et stationært punkt er altså nødvendigvis et lokalt maksimum*.

Men når der højst er et stationært punkt slutter vi yderligere: *Et eventuelt stationært punkt er faktisk et globalt maksimum.*

Vi mangler nu kun at vise, at der rent faktisk eksisterer et stationært punkt! Det er imidlertid heller ikke uoverkommeligt. Hertil skal vi løse ligningen

$$T\,'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + u(x) = 180^\circ$$

Men hvis *x* og *u*(*x*) er supplementvinkler har de modsatte cosinusværdier, dvs.

$$\begin{aligned} \cos(x) &= -\cos(u(x)) \\ &= -\frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2 \cdot c \cdot d} - \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

Det omformes til:

$$\begin{aligned} &2 \cdot c \cdot d \cdot \cos(x) = \\ &\qquad a^2+b^2-c^2-d^2-2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

I denne ligning kan vi isolere cos(*x*), hvorved vi finder:

$$\cos(x) = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2 \cdot (a \cdot b + c \cdot d)}$$

Denne ligning kan løses i intervallet 0 < *x* < 180°, netop når højresiden ligger mellem –1 og 1.

Vi skal altså godtgøre den følgende dobbeltulighed: $-1 < \dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2 \cdot (a \cdot b + c \cdot d)} < 1$

ISBN 9788770668699

Det er imidlertid blot firkantbetingelserne i forklædning! Vi viser én af dem:

$$\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\cdot(a\cdot b+c\cdot d)}<1$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-c^2-d^2<2\cdot a\cdot b+2\cdot c\cdot d$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2\cdot a\cdot b<c^2+d^2+2\cdot c\cdot d$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2<(c+d)^2$$

Denne sidste er ensbetydende med de følgende to uligheder (overvej!):

$$a-b<c+d \quad \Leftrightarrow \quad a<b+c+d$$

$$b-a<c+d \quad \Leftrightarrow \quad b<a+c+d$$

Og dette er netop firkantbetingelserne, der udsiger at summen af de tre sidelængder altid skal være større end den fjerde for at man kan konstruere en konveks firkant med de givne sidelængder.

Dermed har vi gennemført en analysen af de stationære punkter for arealfunktionen og konkluderer:

Hovedsætning 10
Hvis *a*, *b*, *c* og *d* er sidelængderne i en konveks firkant, så er arealet *T* maksimalt, netop når de modstående vinkler i den konvekse firkant er supplementvinkler, dvs. netop når firkanten er *cyklisk*, dvs. den kan indskrives i en cirkel.
I givet fald er vinklerne i firkanten givet ved de *cykliske cosinusrelationer*:

$$\cos(ab)=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\cdot(a\cdot b+c\cdot d)}$$

Bemærkning. De *cykliske cosinusrelationer* er behandlet i projekt 8.12 i C-bogen.

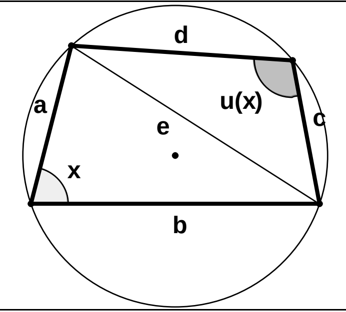
Vi kan imidlertid også finde den eksakte værdi for det maksimale areal.

Da vinklerne ved *ab* og *cd* er supplementvinkler har de samme sinus-værdi i maksimumsstedet x_0, dvs. arealet er givet ved:

$$T(x_0)=\tfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(x_0)+\tfrac{1}{2}\cdot c\cdot d\cdot\sin(u(x_0))$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\left(a\cdot b+c\cdot d\right)\cdot\sin(x_0)$$

Vi skal altså blot finde sinusværdien.
Men vi kender allerede cosinusværdien. Vi benytter derfor den pythagoræiske identitet:



$$\sin^2(x_0)=1-\cos^2(x_0)$$

$$=1-\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{\left(2\cdot(a\cdot b+c\cdot d)\right)^2}$$

$$=\frac{\left(2\cdot(a\cdot b+c\cdot d)\right)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{\left(2\cdot(a\cdot b+c\cdot d)\right)^2}$$

Vi får altså:

$$\sin(x_0)=\frac{\sqrt{\left(2\cdot(a\cdot b+c\cdot d)\right)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}}{2\cdot(a\cdot b+c\cdot d)}$$

ISBN 9788770668699

Indsættes det fås derfor:

$$T_0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{\left(2\cdot(a\cdot b+c\cdot d)\right)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}$$

Formlen er fuldt brugbar i denne form. Men den kan skrives med en usædvanlig smuk symmetri, hvis vi benytter kvadratreglerne:

$$\begin{aligned}T_0 &= \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{\left(2\cdot(a\cdot b+c\cdot d)+a^2+b^2-c^2-d^2\right)\cdot\left(2\cdot(a\cdot b+c\cdot d)-a^2-b^2+c^2+d^2\right)}\\ &= \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{\left((a+b)^2-(c-d)^2\right)\cdot\left((c+d)^2-(a-b)^2\right)}\\ &= \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{\left(a+b+c-d\right)\cdot\left(a+b-c+d\right)\cdot\left(c+d+a-b\right)\cdot\left(c+d-a+b\right)}\\ &= \tfrac{1}{4}\cdot\sqrt{\left(a+b+c-d\right)\cdot\left(a+b-c+d\right)\cdot\left(a-b+c+d\right)\cdot\left(-a+b+c+d\right)}\end{aligned}$$

Formlen blev fundet af den indiske matematiker Brahmagupta i det syvende århundrede.

Øvelse 1: **Brahmaguptas arealformel**

a) Indfør firkantens halve omkreds:

$$s=(a+b+c+d)/2$$

Gøre rede for at arealformlen også kan skrives på den traditionelle form:

$$T=\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}$$

b) Antag én af siderne i den cykliske firkant, fx *d*, klapper sammen, dvs. vi sætter *d* = 0. Så er figuren en trekant! Hvordan ser formlen så ud? Kan du genkende formlen?

c) Formlen er tydeligvis symmetrisk i siderne *a*, *b*, *c* og *d*. Arealet af en cyklisk firkant afhænger altså ikke af rækkefølgen af siderne *a*, *b*, *c* og *d*. Men det gør firkantens form! Hvad sker der med diagonaler og vinkler, når vi ombytter sidernes rækkefølge?

Øvelse 2: Cosinusrelationen

Cosinusrelationen for en cyklisk firkant er givet ved udtrykket:

$$\cos(ab)=\frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2\cdot(a\cdot b+c\cdot d)}$$

a) Antag én af siderne i den cykliske firkant, fx *d*, klapper sammen, dvs. vi sætter *d* = 0. Så er figuren en trekant! Hvordan ser formlen så ud? Kan du genkende formlen?

b) Hvad sker der med størrelsen af vinklen, når man ombytter *a* med *b*, henholdsvis *c* med *d*? Hvad sker der, når man ombytter (*ab*) med (*cd*)?

c) Hvad sker der, når man ombytter *a* med *c*?

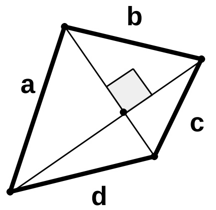
Prøv at begrunde de ovenstående symmetrier geometrisk.

ISBN 9788770668699

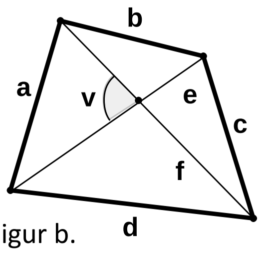
Bilag 1. Formler i almene konvekse firkanter

Vinklerne: Vinkelsummen er 360°:
$A + B + C + D = 360°$

Pythagoras: Diagonalvinklen v er ret, netop når summen af kvadraterne på de modstående sider er lige store (se figur a):
$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.



Figur a.



Figur b.

Cosinusrelationen for diagonalvinklen:
(se figur b)

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 - 2 \cdot e \cdot f \cdot \cos(v)$$

Arealformlerne:

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin(v)$$

$$T = \tfrac{1}{4} \cdot \left((b^2 + d^2) - (a^2 + c^2) \right) \cdot \tan(v)$$

$$T^2 = \tfrac{1}{4} \cdot e^2 \cdot f^2 - \left(\frac{(b^2 + d^2) - (a^2 + c^2)}{4} \right)^2$$

Firkantuligheden:

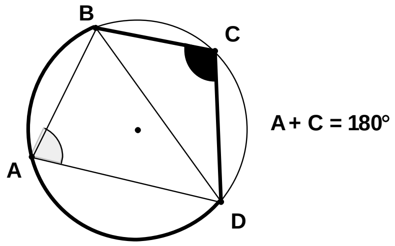
$$e \cdot f \le a \cdot c + b \cdot d$$

Her gælder der kun lighedstegn, hvis firkanten *abcd* er cyklisk.

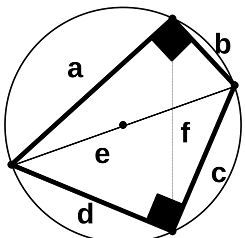
ISBN 9788770668699

Bilag 2. Formler i almene cykliske firkanter

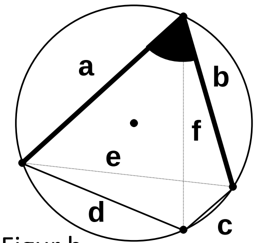
Vinklerne: Modstående vinkler i en cyklisk firkant er supplementvinkler:



Pythagoras: En cyklisk firkant er dobbelt retvinklet, netop når $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Den fælles værdi er e^2 og diagonalen *e* er diameter for den omskrevne cirkel (se figur a):



Figur a.



Figur b.

Cosinusrelationen: (se figur b)

$$c^2 + d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot \left(a \cdot b + c \cdot d\right) \cdot \cos(ab)$$

Arealformlen: (Brahmaguptas sætning)

$$T = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}$$

med $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

Ptolemaios sætning:

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$$