ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse EGMONT

Projekt 5.2 Grænseværdi og kontinuitet – klassisk og moderne

Introduktion

Kontinuitet er et betydeligt sværere begreb at få styr på end differentiabilitet. Det skyldes, at differentiabilitet er en "finere" egenskab, således at klassen af differentiable funktioner er meget mindre omfattende, end klassen af kontinuerte funktioner. I kapitel 1 har vi præsenteret nogle eksempler på mærkelige funktioner, der – lidt i strid med vores intuition – er kontinuert næsten overalt. Vi møder ikke så mange "skøre" funktioner, der er differentiable. De grundlæggende og svære problem i håndteringen af kontinuitet er at kunne håndtere et *grænseværdibegreb*. På B-niveau har vi givet den klassiske definition, som man anvendte i mange hundrede år, den såkaldte *talfølge-definition*, hvor vi sender en (uendelig) følge af tal ind mod et fast tal, og så undersøger, hvad der sker med de tilsvarende funktionsværdier. I dette projekt vil vi undersøge svagheden ved denne definition, og derefter giver den moderne definition som er præsenteret i kapitel 1. Vi vil demonstrere styrken i brugen af den moderne definition – men hovedsigtet med projektet er at bevise, at de to definitioner faktisk er ækvivalente, blot vi formulerer os tilstrækkeligt præcist. Vi indleder med en historisk ramme, som rummer stof, du kan genfinde i indledningen til kapitel 2, og som er beslægtet med den matematik, der blev præsenteret i B-bogens kapitel 7 om Fourierrækker.

Man behøver ikke gennemgå hele projektet, men kan vælge udelukkende at arbejde med beviset for ækvivalensen af de to definitioner.

Differential- og integralregningens historiske udvikling

Matematikken udviklede sig eksplosivt, efter at Newton og Leibniz i slutningen af 1600-tallet havde åbnet portene til differential- og integralregningen. Det var et kæmpekontinent, der her var opdaget – det største indenfor hele matematikkens verden. Og i begejstring stormede matematikerne gennem det næste århundrede ind over det, mens de udviklede stadigt nye teknikker.

Hidtil var næsten al matematik bygget op over geometriske betragtninger: Matematikken var så at sige vokset frem af den klassiske græske geometri. Indenfor geometriens verden følte man sig på sikker grund, med dennes aksiomer og strenge krav til at være præcis i sine argumenter.

I aritmetikken – talbehandlingen – var man på mere usikker grund. I 1600-tallet var man stadig ikke fortrolig med negative tal! Når en andengradsligning havde en positiv og en negativ løsning kaldte man den sidste for en *falsk* eller en *umulig* løsning, og man så normalt bort fra sådanne. Dengang repræsenterede et tal altid noget virkeligt – længder, vægt, arealer, rumfang osv. Derfor var det naturligt at opløfte i tredje, svarende til rumfang, men suspekt at opløfte i fjerde, for hvad skulle det repræsentere? Irrationale tal optrådte, idet man uden betænkeligheder skrev kvadratroden eller den tredje rod af et tal. Allerede i 1500-tallet, hvor man fandt formlen for at løse en tredjegradsligning, var man imidlertid begyndt at fundere over, om man kunne tillægge kvadratroden af negative tal nogen mening. Det kunne man næppe, men ligesom med *falske* rødder opskrev man dem alligevel. Sådanne tal blev kaldt *indbildte* tal og repræsenterede de første skridt ind i de komplekse tals verden. Og dette sker som sagt, mens man stadig er usikker på, hvad et negativt tal er.

Geometriske betragtninger kom også til at præge differential- og integralregningen de første 150 år. Differentialkvotienter blev defineret som hældningskoefficienter for tangenter. En tangent er som bekendt graf for *det approksimerende førstegradspolynomium*, og man fandt tidligt ud af, at dette kunne generaliseres til *approksimerende andengrads-*, tredjegrads-, … , n'tegradspolynomium. Jo større grad, desto bedre tilnærmelse.

ISBN 9788770668699

Hvorfor så ikke fortsætte i det uendelige? Det så ud til, at en funktion kunne skrives som *en uendelig sum af potenser* – en slags uendeliggradspolynomium. Efterhånden lykkedes det at udtrykke flere og flere af de kendte funktioner på denne måde, f.eks.:

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-...$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-...$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...$$

Ligesom en tangent ligger i et bestemt punkt, således er *de approksimerende polynomier også bestemt ud fra et bestemt punkt*. Det samme gælder de uendelige rækker, hvor ovenstående rækkeudviklinger af $\cos(x)$, $\sin(x)$ og e^x er foretaget i $x_0=0$.

Da det lykkedes at finde sådanne uendelige summer for flere og flere funktioner, når nogle af de største matematikere i 1700-tallet, som Euler og Lagrange, frem til den (fejlagtige) opfattelse, at dette gælder for *alle* funktioner. Men er dette tilfældet, kan man derved også helt slippe af med det mystiske grænseværdibegreb, ræsonnerer Lagrange, og han beslutter faktisk at *definere* differentialkvotienten som koefficienten til førstegradsleddet i den uendelige række hørende til funktionen. I ovenstående eksempler er således ifølge Lagrange: $\cos'(0)=0$, $\sin'(0)=1$ og $\exp'(0)=1$, hvor vi anvender notationen $e^x=\exp(x)$.

De uendelige rækker konstrueres normalt ud fra den første, anden, tredje osv. afledede af funktionen, så det ser måske ud til, at Lagrange gik i ring. Men det er ikke tilfældet. For hvis den uendelige række *findes*, så kan vi jo lave definitionen som Lagrange gør. Dernæst kommer ganske vist spørgsmålet, om vi i praksis kan finde disse koefficienter, men det er et teknisk problem.

Euler er ikke helt så radikal. Han søger stadig at få hold på et grænseværdibegreb og indfører en slags uendeligt små størrelser, som han betegner med 0, og som han rask væk regner med; f.eks. lader han 0 indgå i brøker og forkorter det væk, hvor han kan. Og Euler når frem til så mange korrekte resultater, at det i sig selv var et argument for hans metode.

Omskrivning af funktioner til uendelige summer af potenser havde en række indlysende fordele. Matematikerne havde nemlig tidligt opdaget, at det er let at differentiere – hvad som helst kan vi klare – men det er svært at integrere. Potenser kan vi let finde stamfunktioner til, men komplicerede sammensatte udtryk må vi ofte give op over for. Hvis nu *alt* er summer af potenser, så kan vi vel bare finde stamfunktionen led for led, og på den måde integrere vilkårlige funktioner?

Se f.eks. på rækkerne for sin(x) og cos(x): Vi finder en stamfunktion til cos(x) led for led:

$$\int\cos(x)\,dx=\int\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-...\right)dx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-...+k\,,$$

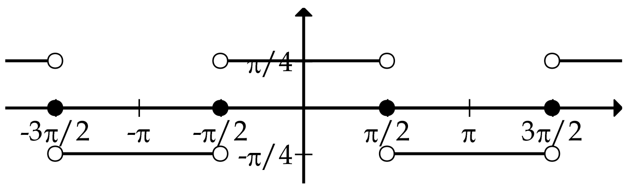
og det er netop $\sin(x)+k$.

Metoden slog igennem og var i årtier den dominerende indenfor differential- og integralregningen. Den anvendtes også med succes til løsning af differentialligninger. Metodens gennemslagskraft skyldtes naturligvis først og fremmest, at den var effektiv. Men det talte også til dens fordel, at man undgik alle de mærkelige og løse ideer om grænseovergange – Eulers nuller f.eks.

Titlen på Lagranges værk var meget sigende: »Teorien om analytiske funktioner, indeholdende differentialregningens principper, renset for betragtninger om uendeligt små eller forsvindende størrelser, og for betragtninger om grænseværdier og fluxioner, og indskrænket til algebraisk analyse af endelige størrelser«[1].

I begyndelsen af 1800-tallet opstår der imidlertid tvivl om gyldigheden af denne matematiske metode. Man opdager på den ene side funktioner, der ikke er specielt indviklede, men som ikke kan skrives som uendelige summer af potenser. Og på den anden side begynder man at betragte uendelige summer af andre størrelser end potenser, specielt uendelige summer af trigonometriske funktioner. Og her finder man besynderlige resultater: Summen:

$$\cos(u)-\frac{1}{3}\cos(3u)+\frac{1}{5}\cos(5u)-\frac{1}{7}\cos(7u)+\ldots$$ giver en funktion med følgende graf:

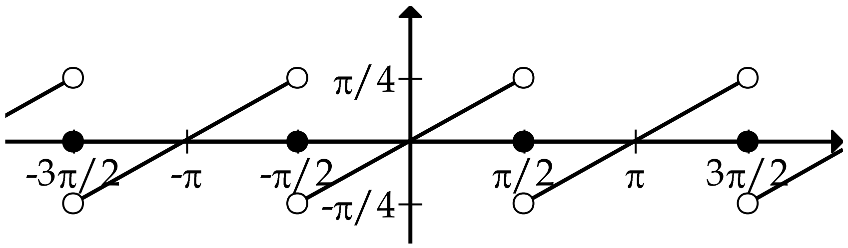


Den kaldes *Fouriers firkantbølge*, opkaldet efter den matematiker, Joseph Fourier, der som den første undersøgte disse summer systematisk.

Han fandt tilsvarende ud af, at den uendelige sum:

$$\sin(u)-\frac{1}{2}\sin(u)+\frac{1}{3}\sin(u)-\frac{1}{4}\sin(u)+\ldots$$

giver den såkaldte »savtakfunktion« med følgende graf:



En sum af to kontinuerte funktioner giver naturligvis en kontinuert funktion. Tager vi flere og flere led med i summen gør det ingen forskel: Det er stadig en pæn kontinuert funktion. Og det uanset hvor mange millioner og milliarder led vi tog med. Det forekommer også indlysende, at når vi adderer grafer, der er sammenhængende, må vi som resultat få noget der igen er sammenhængende. Men hvad ser vi så her: Tager vi *alle* led med – dvs. uendeligt mange – så får vi en diskontinuert funktion. Der kommer et spring på grafen!

Dette var meget mærkelige resultater, og det tvang matematikerne til at revidere mange af deres hidtidige opfattelser. Fourier publicerede sine undersøgelser i 1822. Året før havde en af 1800-tallets største matematikere Augustin Cauchy udgivet et af sine hovedværker om den matematiske analyse – et værk, der genindfører grænseværdibetragtninger, og som er det første »moderne« værk om differential- og integralregningen. Men heri »beviser« Cauchy, at en uendelig sum af kontinuerte funktioner er kontinuert!

[1] Fluxioner var Newtons betegnelser for de uendeligt små størrelser.

ISBN 9788770668699

Det bliver dog ikke Fourier selv, der påpeger fejlen hos Cauchy. Fourier var først og fremmest interesseret i matematikkens anvendelser, og hans epokegørende værk med de mærkelig summer er slet ikke en matematikbog, men en fysikbog omhandlende varmeteori. Det er derimod den norske matematiker Niels Henrik Abel[2], der få år senere gør opmærksom på fejlen hos Cauchy – og netop med »savtakfunktionen« som et modeksempel. Så selv de største matematikere kan miste overblikket og begå fejl.

Cauchys store fortjeneste var genindførelsen af grænseværdibetragtninger. Hans grænseværdibegreb er stort set det, vi anvender i dag: *Hvis en række af tal x_1, x_2, …, x_n nærmer sig et fast tal x_0, på en sådan måde, at forskellen til sidst er så lille, som man har ønsket det, så kaldes x_0 for grænseværdien af de andre.* Sådan skrev Cauchy i 1821.

Ved hjælp af sit nye grænseværdibegreb definerede Cauchy kontinuitet og differentiabilitet. Cauchy er fra matematikkens hovedland Frankrig og derfor den, man lagde mærke til. Hans bøger blev anvendt over hele Europa. Men få år før definerede en tjekkisk matematiker, Bolzano, faktisk grænseværdier og kontinuitet på samme moderne måde som Cauchy. Bolzanos målsætning var at bevise den første hovedsætning om kontinuerte funktioner, og han nåede længere end andre på hans tid, men dog ikke til vejs ende. Han stødte panden mod den mur, der hedder *de reelle tals opbygning.* Hans værk fik ikke den betydning, det havde fortjent – i Tyskland og Frankrig blev Bolzano først kendt, efter han var død.
Det blev tyskeren Karl Weierstrass, der i 1860'erne fuldførte Cauchys værk og endelig fik skabt det moderne og præcise grænseværdibegreb. Den måde, hvorpå en matematiker i dag opskriver definitionen på kontinuitet, når han skal være helt præcis, er ord til andet taget fra Weierstrass. Dette gennemgår vi i næste afsnit.

Weierstrass' arbejde lagde også grunden til, at en af hans elever, Georg Cantor, sammen med Richard Dedekind i 1880'erne endelig fik hold på de reelle tals opbygning. Disse to tyske matematikere fordybede sig ikke mindst i de matematiske og filosofiske problemer omkring de reelle tal og uendelighedsbegrebet. De opdagede nemlig, at uendelighed ikke bare er uendelighed:

Allerede Galilei havde faktisk gjort opmærksom på det paradoks, at der i kraft af sammenparringen:

$1–1, 2–4, 3–9, 4–16, \ldots, n–n^2, \ldots$

tilsyneladende er lige mange naturlige tal og kvadrattal – selv om mængden af kvadrattal åbenlyst er en beskeden delmængde af de naturlige tal. Der er også i en vis forstand lige mange hele tal og rationale tal, idet samtlige brøker kan stilles op på række og tælles. Dette er lidt vanskeligere end Galileis sammenparring, men prøv selv, om du kan løse opgaven for de positive, rationale tal, ved at følge denne opskrift: Gruppér først alle brøkerne i halve, tredjedele, fjerdedele osv., og stil tallene i hver af disse grupper op i rækkefølge, f.eks. således: $\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2},\frac{4}{2},\ldots$ Placer alle disse (uendeligt mange) rækker under hinanden. Og find nu en snedig måde at tælle diagonalt, så du får alle med. Lykkes det, er *alle* brøkerne stillet op på række, og derved parret sammen med de naturlige tal.

Men de irrationale tal kan ikke stilles op i række: Der er langt flere irrationale end rationale tal. Der er altså forskellige grader af uendelighed. Det var en af Cantors store opdagelser. Den moderne matematiske analyse tager sit udgangspunkt i det arbejde, som disse matematikere lavede for godt 100 år siden. Du kan finde de præcise argumenter om uendelighedsbegrebet i den indledende fortælling til A-bogens kapitel 1.

---

[2] Abel er i matematikhistorien bl.a. kendt som den, der beviste, at der ikke kan findes en formel for løsning af femtegradsligninger (og heller ikke af nogen højere grad), som vi kender det fra andengradsligninger, og som der også findes for tredje- og fjerdegradsligninger.

ISBN 9788770668699

Fast grund under grænseværdi- og kontinuitetsbegrebet

To skikkelser i matematikhistorien rager op i bestræbelserne på at få styr på grænseværdibegrebet og dermed også på kontinuitetsbegrebet: Franskmanden Augustin Cauchy (1789-1857) og tyskeren Karl Weierstrass (1815-1897).

Cauchy publicerede meget, og i det mest berømte af hans skrifter, Cours d'Analyse fra 1821 findes den definition på grænseværdibegrebet, som vi i praksis anvender i gymnasiet i dag:

> *Når en følge af tal nærmer sig en fast størrelse på en sådan måde, at talfølgens elementer slutteligt adskiller sig fra den faste størrelse med så lidt som vi kunne ønske os, så siger vi, at den faste størrelse er grænseværdi for de øvrige.*

Hans definition på kontinuitet lyder:

> *f er kontinuert i et interval, hvis det gælder, at en uendelig lille tilvækst h af variablen x, giver en uendelig lille tilvækst* $f(x+h)-f(x)$ *af funktionsværdien.*

Også den sidste definition virker ganske moderne; men vi bemærker dog, at Cauchy kun definerede kontinuitet i et helt interval, ikke i et enkelt punkt.[3]
Når vi forsøger at oversætte Cauchy's formuleringer: »så tæt på vi ønsker«, »en uendelig lille tilvækst« osv. til et præcist matematisk sprog, der giver mulighed for beregninger og præcise svar, opstår der imidlertid åbenlyse problemer.
Vanskelighederne heri illustreres af, at Cauchy selv »beviste« nogle forkerte sætninger. Der var kort sagt brug for en så præcis matematisk formulering, at den kunne anvendes til at gennemføre præcise beviser. Og det var netop hvad Weierstrass gjorde.

Weierstrass var oprindelig slet ikke professionel matematiker. Hans far ønskede, han studerede økonomi og administration; men da sønnen ikke fandt interesse i disse fag, men derimod var en stor ynder af tyske ølstuer, gik årene, uden Weierstrass nogensinde fik en eksamen. Han forlod universitetet og tog forskelligt forefaldende arbejde inden for undervisning, samtidig med at han i fritiden dyrkede sin store lidenskab, matematikken. Og han demonstrerede sin store begavelse gennem en række opsigtsvækkende matematiske artikler, der resulterede i at han »blev kaldet« til en stilling på Berlins Universitet.

Weierstrass publicerede ikke selv ret meget; men gennem sine berømte forelæsninger præsenterede han en række nye tanker og metoder fra sin forskning, ideer, som han generøst overlod til sin store skare af højt kvalificerede studenter at færdiggøre. Stort set alle Europas unge lovende matematikere drog i de år – fra først i 1860'erne – til Berlin for at følge hans forelæsninger, og med Weierstrass forskydes tyngdepunktet i matematikhistorien fra Frankrig til Tyskland.

Weierstrass blev tidligt så syg, at han ikke kunne stå op og skrive under en forelæsning; han sad derfor ned, dikterede til en student, der på hans bud malede tavlen fuld. Denne anstrengende arbejdsform var givetvis medvirkende til, at Weierstrass gennemarbejdede sine forelæsninger ned til den mindste detalje, hvorved de notater, studenterne tog, faktisk var som lærebøger. Og netop gennem kopier af sådanne notater og gennem de artikler, hvori Weierstrass' elever bearbejdede hans resultater, lærte matematikverdenen hurtigt om disse nye »Weierstrasske krav til stringens (præcision)« – og hans metoder blev overtaget ord til andet.

Men det var som nævnt altid andre, der præsenterede ideerne – således var det Eduard Heine og Sofia Kovalevskaya (der begge siden indskrev sig i matematikhistorien), der publicerede Weierstrass' nye tilgang til kontinuitetsbegrebet.

---

[3] Ud fra den intuitive opfattelse af kontinuitet som svarende til, at grafen er sammenhængende, er forestillingen om kontinuitet i et enkelt punkt også en svært begribelig egenskab. Kontinuitet forstået som sammenhæng vil man umiddelbart knytte til et interval.

ISBN 9788770668699

Det centrale spørgsmål var at få styr på *grænseværdibegrebet*: Hvad skal vi forstå ved følgende formulering:

$f(x) \to L$ når $x \to a$?

Vi er vant til at gribe sagen således an: Vi begynder med en følge af *x*-værdier, og dernæst ser vi på, hvad der sker med $f(x)$'erne. Men dette giver de føromtalte problemer: Hvordan kan vi vide, at den følge, vi begyndte med, er *typisk* – ville vi få samme resultat med en hvilken som helst anden følge af *x*'er?

Weierstrass løser knuden ved at vende problemstillingen $180°$: Hvad er det, vi vil frem til, spørger han. Ifølge Cauchy vil vi frem til en konklusion om, at forskellen på *f*(*x*) og *L* kan gøres så lille, som det ønskes (ved at vælge *x* på den og den måde). Men så er det her, vi begynder, siger Weierstrass.

Lad os forestille os det som »et spil«: Over for os står en »modstander«, der udfordrer os ved at fastlægge et meget snævert interval om *L*, måske med en afstand på 1/1000 eller 1/1.000.000 fra *L*. Eller endnu tættere på: Vi indfører en ny størrelse *ε* (græsk bogstav: »epsilon«), der skal angive, *hvor* tæt vi ønsker at være på *L*. *ε* har vi ingen indflydelse på – det stikkes os ud af vores »modstander«. Nu er det så *vor* opgave at fastlægge et interval om *a*, på en sådan måde, at når *x* er i dette interval, er vi *sikre* på, at $f(x)$ er i det ønskede interval om *L*.

Det interval, *vi* fastlægger omkring *a*, bestemmes mest enkelt ved at angive et tal *δ* (græsk bogstav: »delta«), der måler afstanden fra *x* til *a*. Lad os navngive de omtalte intervaller:

$J_\varepsilon =]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$, og $I_\delta =]a-\delta; a+\delta[$.

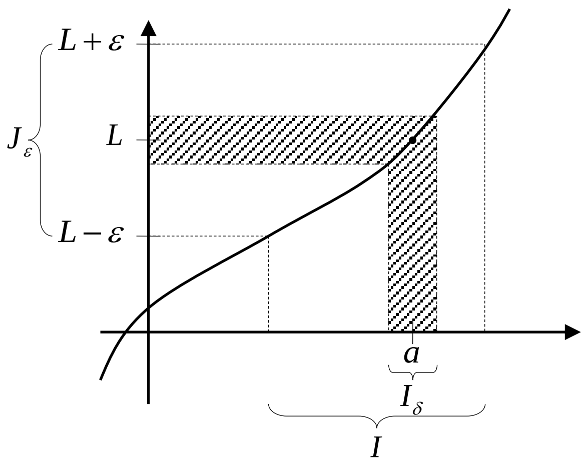
Weierstrass' definition på grænseværdi lyder så:

Definition: Grænseværdi (1. Version)

$f(x)$ har grænseværdien *L*, når *x* går mod *a*, på kort form: $f(x) \to L$ når $x \to a$, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at der for $x \neq a$ gælder: $x \in I_\delta \Rightarrow f(x) \in J_\varepsilon$.

Bemærkning: Definitionen er sammensat således, at *x* ikke kan blive lig med *a*. Dette er vigtigt, for $f(x)$ kan sagtens have en grænseværdi uden at være defineret i *a*.

Grafisk kan situationen være således:



1) Først vælges intervallet J_ε.
2) J_ε fastlægger nu via grafen de ydre grænser for intervallet *I*.
3) I_δ kan vælges på utallige måder, men f.eks. som på tegningen.
4) Vi kontrollerer nu, at: $x \in I_\delta \Rightarrow f(x) \in J_\varepsilon$: *f* kører *x* op ad den skraverede vej.

ISBN 9788770668699

Når vi skal til at udnytte definitionen til at regne, er det ofte en fordel at have den skrevet med uligheder i stedet for intervaller:

Definition: Grænseværdi (2. Version)
Vi siger at $f(x) \to L$ når $x \to a$, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Øvelse 1
Lav en skitse af $f(x) = x^2$ i intervallet $[-3;3]$, og illustrer på din tegning, at der gælder:

$$f(x) \to 4 \text{ når } x \to 2$$

Definitionen på grænseværdi fører straks over i definitionen på kontinuitet:

Definition: Kontinuitet i et punkt
Vi siger, at *f* er kontinuert i x_0, hvis der gælder, at $f(x) \to f(x_0)$ når $x \to x_0$, dvs. hvis der gælder:
Til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Bemærk at vi her har erstattet $0 < |x-a| < \delta$ med: $|x-a| < \delta$, idet situationen for $x \to x_0$ er helt triviel: *f* er jo defineret i x_0.

Det var ikke denne definition på kontinuitet, Weierstrass i første omgang gav. Som tidligere omtalt opfattede de stadig kontinuitet som en egenskab i et interval; og bestræbelserne hos Weierstrass og samtidige var at få styr det lidt mere komplicerede begreb »uniform kontinuitet« (på dansk: »ligelig kontinuitet«), som vi omtaler i appendiks 2. Det blev således en af Weierstrass' elever Eduard Heine, der som den første definerede begrebet *kontinuitet i et punkt*.

Anvendelse af definitionen på grænseværdi eller kontinuitet volder altid besvær i starten. Det skyldes sikkert, at vi har svært ved at slippe fokus fra *x*'erne og i stedet sætte fokus på *f*(*x*). Men det er her, hele ideen ligger:

Vi begynder med den *ønskede* konklusion: $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ud fra en analyse af dette, når vi gennem forskellige omskrivninger frem til *hvilket krav*, der så må stilles til *x*'erne, dvs. til fastlæggelse af *δ*.

Før vi illustrerer dette med et par eksempler, så prøv at løse følgende opgaver grafisk:

ISBN 9788770668699

Øvelse 2

Indtast i de følgende opgaver regneforskriften og indret grafvinduet således at *x*-værdierne ligger tæt ved tallet *a*, og *y*-værdierne tæt ved tallet *L*. Få endelig en grafisk fremstilling af, hvilket krav det givne ε stiller til det interval, vi ønsker at lægge om *a*, ved at indtaste de to konstante funktioner $y_2 = L + \varepsilon$ og $y_3 = L - \varepsilon$. Bestem fx ved hjælp af skæringspunkterne mellem graferne en værdi af *δ*, der »matcher« *ε*.

1. $f(x)=\sqrt{2x+3}$; undersøg påstanden: $f(x)\to 3$ når $x\to 3$ ved at finde et *δ*, der matcher $\varepsilon=0{,}01$, dvs. opgaven er at finde et *δ*, således at:
   $|x-3|<\delta \Rightarrow |f(x)-3|<0{,}01$ eller: $x\in\,]3-\varepsilon;3+\varepsilon[\,\Rightarrow f(x)\in\,]3-0{,}01;3+0{,}01[$.

2. $f(x)=x^3$; undersøg påstanden: $f(x)\to 8$ når $x\to 2$ ved at finde et *δ*, der matcher $\varepsilon=0{,}2$.

3. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$; undersøg påstanden: $f(x)\to 1$ når $x\to 0$ ved at finde et *δ*, der matcher $\varepsilon=0{,}05$.

4. Undersøg påstanden: $\dfrac{x-2}{1+x^2}\to 0$ når $x\to 2$ ved at finde et *δ*, der matcher $\varepsilon=0{,}01$.

5. Undersøg påstanden: $\dfrac{x+1}{x^2-1}\to -\frac{1}{2}$ når $x\to -1$ ved at finde et *δ*, der matcher $\varepsilon=0{,}001$.

Anvendelse af definitionen til præcise beviser for grænseværdier

Eksempel 1

Vi skal vise:

$$3x+1\to 7 \text{ når } x\to 2$$

Løsning:

Lad *ε* være givet. Den ønskede konklusion er: $|(3x+1)-7|<\varepsilon$.

Vi omskriver: $|(3x+1)-7|=|3x-6|=3|x-2|$.

Den ønskede konklusion fås, hvis $3|x-2|<\varepsilon$, dvs. hvis $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Derfor vælges $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$. Så får vi:

$$|x-2|<\delta \Rightarrow |(3x+1)-7|<\varepsilon$$

L&R Uddannelse EGMONT

Eksempel 2
Vi skal vise:

$$\frac{1-4x^2}{1-2x} \to 2 \text{ når } x \to \tfrac{1}{2}:$$

Løsning:

Lad ε være givet. Den ønskede konklusion er: $\left|\frac{1-4x^2}{1-2x}-2\right| < \varepsilon$.

Vi omskriver: $\left|\frac{1-4x^2}{1-2x}-2\right| = \left|\frac{(1+2x)(1-2x)}{1-2x}-2\right| = |1+2x-2| = |2x-1| = 2\left|x-\tfrac{1}{2}\right|$.

Den ønskede konklusion fås, hvis $2\left|x-\tfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$, dvs. hvis $\left|x-\tfrac{1}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Derfor vælges $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Så får vi:

$$\left|x-\tfrac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1-4x^2}{1-2x}-2\right| < \varepsilon$$

Eksempel 3
Vi skal vise:

$$\sqrt{x} \to 2 \text{ når } x \to 4 :$$

Løsning:

Lad ε være givet. Den ønskede konklusion er: $\left|\sqrt{x}-2\right| < \varepsilon$.

Vi omskriver: $\left|\sqrt{x}-2\right| = \left|\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x+2}}\right| = \left|\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right| \cdot |x-4|$.

Da vi skal undersøge $x \to 4$, kan vi uden indskrænkning nøjes med at se på $x \geq 1$, dvs. $\sqrt{x} \geq 1$.
Dermed er $\sqrt{x}+2 \geq 1+2 = 3$, og $\left|\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right| < \tfrac{1}{3}$.

Indsæt dette: $\left|\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right| \cdot |x-4| \leq \tfrac{1}{3}|x-4|$.

Den ønskede konklusion opnås, hvis: $\tfrac{1}{3}|x-4| < \varepsilon$, eller: $|x-4| < 3\varepsilon$.

Derfor vælges $\delta = 3\varepsilon$. Så får vi:

$$|x-4| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x}-2\right| < \varepsilon$$

ISBN 9788770668699

Vi kan opsummere således:

Praxis: Metode til at afgøre spørgsmål om grænseværdi og kontinuitet
En påstand vedrørende kontinuitet i et bestemt punkt eller vedrørende en bestemt grænseværdi: $f(x) \to L$, når $x \to a$, undersøges på følgende måde:

Vi *begynder* med at opskrive den ønskede konklusion: $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Dernæst foretages omskrivninger af typen: $|f(x) - L| = \ldots \leq \ldots \leq K|x - a|$, hvor K er en eller anden konstant.

Ud fra dette ser vi, at vi kan sikre $|f(x) - L| < \varepsilon$, hvis blot vi vælger $|x - a| < \frac{\varepsilon}{K}$.

Altså løser vi problemet ved at vælge $\delta < \frac{\varepsilon}{K}$.

Opgaver

1. Vis: $5 - 2x \to 1$, når $x \to 2$.

2. Vis: $\frac{x^2 + 2x}{x + 2} \to -2$, når $x \to -2$
(Hjælp: Forkort brøken.)

3. Vis: $\sqrt{2x + 3} \to 3$, når $x \to 3$.
(Hjælp: Forlæng $\sqrt{2x + 3} - 3$ med $\sqrt{2x + 3} + 3$. I din vurdering kan du indskrænke dig til at se på f.eks. $x \geq \frac{1}{2}$.)

4. Vis: $\sqrt{x} \to 1$, når $x \to 1$.

5. Vis: $x^3 \to 8$, når $x \to 2$.
(Hjælp: Foretag polynomiers division med $(x - 2)$.)

6. Vis at grænseværdier er entydige, dvs. Hvis $f(x) \to L$, når $x \to a$, og $f(x) \to M$, når $x \to a$, så er $L = M$.

ISBN 9788770668699

Vi vil nu bevise, at følgende fundamentale sætning gælder:

Hovedsætning om grænseværdier
Weierstrass' $\varepsilon-\delta$ definition er ensbetydende med vores traditionelle *talfølge*-definition.

Bevis:
1. $\varepsilon-\delta$ **egenskaben medfører *talfølge*-egenskaben**.
Antag: $f(x)\to L$, når $x\to a$, ifølge Weierstrass' definition.
Lad $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ være en følge af tal, så $x_n\to a$.
Vi ønsker at vise:
$f(x)\to L$, dvs. $f(x_n)$ nærmer sig *vilkårligt tæt* til tallet L.
Læg derfor et lille interval J_ε om L, bestemt ved ε: $J_\varepsilon=]L-\varepsilon;L+\varepsilon[$.
Vælg nu ifølge Weierstrass et interval I_δ om a, der afbildes ind i J_ε: $I_\delta=]a-\delta;a+\delta[$.
Da nu $x_n\to a$, vil x_n'erne fra et vist trin, f.eks. nr. N, være helt med i I_δ.
Weierstrass' definition på grænseværdi giver os:
$x\in I_\delta \Rightarrow f(x)\in J_\varepsilon$.
Men så kan vi sammenfatte:
$x_N,x_{N+1},x_{N+2},...\in I_\delta \Rightarrow f(x_N),f(x_{N+1}),f(x_{N+2}),...\in J_\varepsilon$.
Altså netop den ønskede konklusion.

2. *Talfølge*-egenskaben medfører $\varepsilon-\delta$ **egenskaben.**
Antag: $f(x)\to L$, når $x\to a$, ifølge den traditionelle definition med talfølger, dvs. vi antager:
For *enhver* talfølge: $x_n\to a$ vil $f(x_n)\to L$.
Lad ε være givet og betragt $J_\varepsilon=]L-\varepsilon;L+\varepsilon[$.
Læg nu for ethvert helt tal n i et interval I_n om a, bestemt ved: $I_n=]a-\frac{1}{n};a+\frac{1}{n}[$.
Antag at *ingen* af disse intervaller bliver afbilledet helt ind i J_ε, dvs. *ingen* af dem opfylder Weierstrass' krav: $x\in I_n \Rightarrow f(x)\in J_\varepsilon$.
Vi får nu en modstrid på følgende måde:
Vælg et x_k fra hvert I_k, således at: $f(x_k)\notin J_\varepsilon$.
Ifølge valget af x'erne vil der gælde:
$x_1,x_2,x_3,...,x_n\to a$. (Overvej dette!)
Men ifølge beliggenheden af $f(x_k)$'erne holder disse sig alle uden for intervallet J_ε, så derfor kan der ikke gælde: $f(x_k)\to L$.
Dette er i modstrid med, at påstanden skal gælde for *enhver* talfølge.
Altså kan vi konkludere, at ét af intervallerne I_n vil blive afbildet ind i J_ε .
Og dermed er Weierstrass' definition opfyldt.

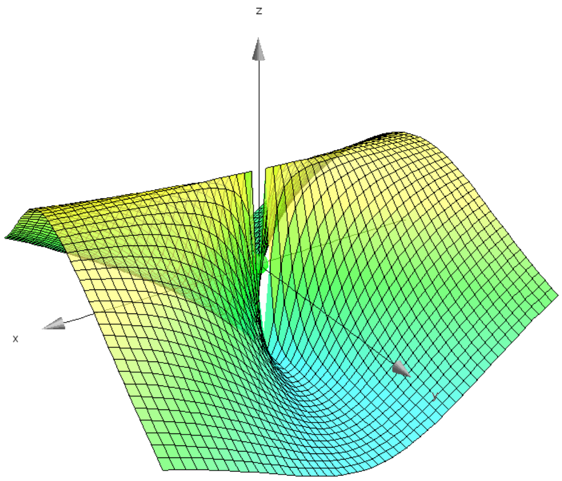
Hovedsætningen gælder specielt for kontinuerte funktioner og fortælle altså:
$\varepsilon-\delta$*-kontinuitet er ensbetydende med følgekontinuitet*
Følgekontinuitet appellerer til intuitionen og sætningen siger altså, at der ikke er noget galt med at fortsætte med at anvende intuitionen. Men vi skal blot hele tiden have i baghovedet, at argumenterer vi ud fra følger, så skal argumentet holde for *enhver* følge. Det kan af og til være svært at overskue, om det nu også er tilfældet som følgende eksempel i 2 dimensioner illustrerer:

ISBN 9788770668699

Eksempel. Talfølger og grænseværdi for funktioner af to variable

Funktioner af to variable er naturligvis mere komplicerede end funktioner af én variabel. Men det kan være lettere at se, hvilke fælder man kan lande i, ved at se på regneforskrifter for sådanne. Lad os se på:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{for } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



Funktionen er defineret i hele planen. Hvad sker der med funktionsværdierne, når vi nærmer os $(0,0)$?
Hvis vi bevæger os ind langs *x*-aksen, er $y=0$, dvs. funktionsværdierne er 1 hele vejen ind.
Hvis vi bevæger os ind langs *y*-aksen, er $x=0$, dvs. funktionsværdierne er -1 hele vejen ind.
Hvis vi bevæger os ind langs linjen $y=x$ i x-y-planen fås funktionsværdien 0 hele vejen ind.
Ved at følge andre retninger ind mod (0,0) får vi endnu flere forskellige grænseværdier.
Konklusionen er, at der ikke er nogen grænseværdi i $(0,0)$, og at *f* derfor ikke er kontinuert i $(0,0)$.

Eksemplet indgår i A-bogens kapitel 1, hvor der også på ***hjemmesiden*** ligger en graf som en interaktiv figur, man kan gå på opdagelse i.